

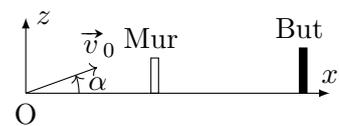
## Table des matières

1 Révisions de première année	1
2 Frottements solides	4
3 Cinématique et changement de référentiels	6
4 Mécanique en référentiel non galiléen	6
5 Sujets d'oraux	10
6 Pour aller plus loin : statique des fluides	11

## 1 Révisions de première année

**Exercice 1 - Coup franc :** On étudie un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2.44 m (cf figure). Le ballon de masse  $m = 430$  g est assimilé à un point matériel M posé sur le sol

initialement en O. Le mur, de hauteur 1.90 m, est situé à 9.15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  de norme  $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et formant un angle  $\alpha$  de  $20^\circ$  avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon. Attention, le schéma n'est pas à l'échelle.



- Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air. Établir l'équation de la trajectoire.
- Le ballon passe-t-il au dessus du mur ? Le tir est-il cadré ? Quelle est la durée du tir ?
- On constate sur un terrain que ces résultats ne sont pas compatibles avec l'expérience. On souhaite modéliser les frottements par une force de la forme  $\vec{F} = -h\vec{v}$  où  $h$  est une constante positive de valeur  $4 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de M à chaque instant. En appliquant la seconde loi de Newton, montrer que le vecteur vitesse de la balle vérifie une équation différentielle du premier ordre.
- Montrer que la vitesse tend vers une valeur limite.
- Est-ce que le modèle des frottements linéaires est pertinent pour un tir de football ?

**Exercice 2 - Amortisseur d'une roue de voiture :** On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement  $\alpha$ . La force de frottement a pour expression  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ . Une masse  $m/4$  est posée sur ce dispositif et peut se déplacer le long de l'axe vertical  $\vec{e}_z$  orienté vers le haut. On prend  $m = 1200$  kg et  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

*Étude statique :*

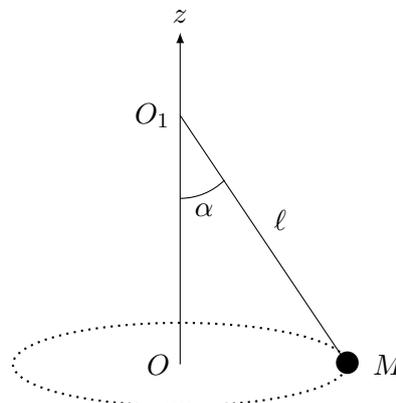
- Réaliser un schéma précis du dispositif, en intégrant toutes les forces en présence.
- Déterminer la longueur à l'équilibre de la suspension en fonction de  $l_0$ ,  $m$ ,  $g$  et  $k$ . Justifier physiquement chacun des termes de la formule.
- Lorsque l'on enlève la roue, le ressort a une longueur totale de 40 cm. En déduire la valeur numérique de  $l_0$ .
- Lors du changement d'une roue, lorsque l'on soulève d'une hauteur  $h = 15$  cm la masse  $m/4$ , le ressort est détendu. En déduire la longueur d'équilibre  $l_{\text{eq}}$  du ressort puis vérifier que  $k = 20 \times 10^3 \text{ N/m}$ .

*Étude dynamique :*

5. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur  $l(t)$  du ressort. La mettre sous forme canonique.
6. En déduire l'expression du facteur de qualité  $Q$  et de la pulsation caractéristique  $\omega_0$ .
7. Déterminer et calculer  $\alpha$  afin que le dispositif fonctionne en régime critique. On prendra soin de bien donner son unité.
8. On enfonce la masse  $m/4$  d'une hauteur  $d = 5$  cm par rapport à sa position d'équilibre et on lâche le système à  $t = 0$  sans vitesse initiale. Calculer  $z(t)$  puis tracer l'allure de la position de  $M$  au cours du temps dans le cas du régime critique.
9. On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut  $m = 2200$  kg. Déterminer les nouveaux paramètres de l'amortisseur  $Q$  et  $\omega_0$ . Tracer la nouvelle allure de la réponse lorsqu'on enfonce de  $d = 5$  cm la masse  $m/4$  et qu'on la lâche sans vitesse initiale à  $t = 0$ .
10. Est-ce que le nombre d'oscillations est satisfaisant pour l'utilisation de l'amortisseur ?

**Exercice 3 - Étude d'un pendule :** On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur  $l$ , de masse négligeable, fixé en  $O_1$  et auquel on a accroché une petite bille de masse  $m$  assimilable à un point matériel  $M$ .  $O_1$  est fixe dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  galiléen.

Un enfant fait tourner le pendule de manière à ce que la masse effectue un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  le plan  $xOy$ . Le fil  $O_1M$  garde une inclinaison constante  $\alpha$  par rapport à la verticale au cours du mouvement.



1. Quelles coordonnées faut-il utiliser ? Faire un schéma du problème pour situer les différentes notations.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déduire une relation entre  $\omega$ ,  $l$ ,  $g$  et  $\alpha$ .
3. Montrer que la vitesse angulaire est forcément supérieure à une certaine valeur  $\omega_0$ .

**Exercice 4 - Trou noir :** Peu après qu'Albert Einstein ait décrit les bases de la relativité générale, Karl Schwarzschild montre que certains corps très massifs, nommés désormais trous noirs, forment des solutions particulières de ses équations. Ces corps sont si massifs qu'aucun objet ne peut s'échapper de leur attraction, pas même la lumière. Bien qu'ils doivent être étudiés dans le cadre de la relativité, notamment pour expliquer qu'ils retiennent la lumière, on peut en déterminer quelques caractéristiques dans le cadre de la physique newtonienne. On considère donc un astre  $\mathcal{A}$  de centre  $O$  de rayon  $R$  et de masse  $M_{\mathcal{A}}$ , et on se place dans le référentiel astrocentrique, supposé galiléen.

1. Montrer que l'énergie mécanique d'un point  $M$  de masse  $m$  situé à une distance  $r$  de  $O$  peut se mettre sous la forme  $\mathcal{E}_m = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ .
2. Tracer  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$  en fonction de  $r$  et en déduire graphiquement la valeur minimale de  $\mathcal{E}_m$  permettant au point  $M$  de s'échapper de l'attraction de  $\mathcal{A}$ . En déduire la vitesse de libération.

On peut alors considérer qu'un trou noir est un astre dont les photons ne peuvent s'échapper, c'est-à-dire pour lequel la vitesse de libération serait supérieure à  $c$ .

3. En déduire le rayon maximal de l'astre en fonction de sa masse pour pouvoir être un trou noir. Ce rayon est nommé rayon de Schwarzschild et noté  $R_S$ .
4. Faire les applications numériques avec la Terre ( $M_T = 5.97 \times 10^{24}$  kg) et le Soleil ( $M_S = 1.99 \times 10^{30}$  kg). Commenter.

Le corps céleste candidat au titre de trou noir dont l'observation est la plus aisée est celui se trouvant au centre de la voie lactée, nommé Sagittarius A\* ou Sgr A\*. Découvert au milieu des années 70 comme une source importante de rayonnement radio, il a été de mieux en mieux caractérisé, jusqu'à l'obtention par diverses expériences de sa masse, d'une limite sur son rayon, de 1 ua (unité astronomique, distance moyenne Terre-Soleil, 1 ua = 1.5 × 10<sup>11</sup> m), et même d'une image en 2017, première « photographie » d'un tel astre.

Sa masse a notamment été obtenue grâce à l'observation d'orbites d'étoiles proches de Sgr A\*, rapportée en 2005 par F. Eisenhauer *et al* dans The Astrophysical Journal, vol. 628, n° 1. De ces observations sont déduites les caractéristiques orbitales de 6 de ces étoiles, rapportées ci-dessous :

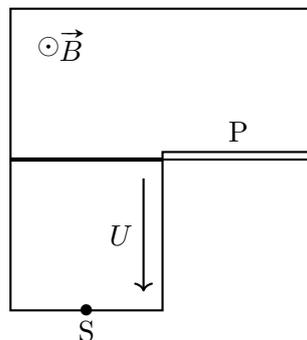
Étoile	S1	S2	S8	S12	S13	S14
demi-grand axe $a$ (en ua)	$3.3 \times 10^3$	$9.8 \times 10^2$	$2.63 \times 10^3$	$2.29 \times 10^3$	$1.75 \times 10^3$	$1.8 \times 10^3$
période $T$ (en années)	94	15.2	67.2	54.4	36	38

- Déterminer la mesure de la masse  $M_{\text{Sgr A}^*}$  de l'astre Sgr A\*.
- La mesure précédente, obtenue en 2002 par un groupe allemand de l'Institut Max Planck de physique extraterrestre, est de  $(3.7 \pm 1.5) \times 10^4$  masses solaires. Ces deux mesures sont-elles compatibles ?
- Déterminer le rayon de Schwarzschild de cet astre. Peut-on conclure sur le fait qu'il s'agisse ou non un trou-noir ?

Données : Constante universelle de gravitation  $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ;

**Exercice 5 - Spectrographe de masse :** Un spectrographe de masse est un appareil permettant, entre autres, de séparer les différents isotopes d'un élément dans un échantillon.

On l'utilise ici avec un faisceau de particules chargées, constitué d'ions de deux isotopes de mercure ( $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$  (1) et  $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$  (2)), provenant une source  $S$ .



Ces ions sont accélérés par une différence de potentiel  $U > 0$ .

Ils pénètrent ensuite dans une zone de champ magnétique uniforme,  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

- Déterminer les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  des isotopes après leur accélération.
- Montrer que la trajectoire des ions est circulaire dans la zone où règne le champ  $\vec{B}$  et donner l'expression du rayon.
- La plaque photographique  $P$  sert à recueillir les ions déviés, qui forment des taches. Déterminer l'espacement  $d$  entre les taches correspondant à chacun des isotopes, en fonction des données du problème.

**Éléments de réponse :**

1 - 2.  $z(t_{\text{mur}}) \approx 2.2 \text{ m}$ ;  $t_{\text{but}} \approx 1.06 \text{ s}$ ;  
 $z(t_{\text{but}}) \approx 1.7 \text{ m}$ ; 4.  $\vec{v}_{\text{lim}} = -mg/h \vec{e}_z$ ; 5.  
 $\tau \approx 1 \times 10^5 \text{ s}$ .

2 - 2.  $l_{\text{eq}} = l_0 - mg/(4k)$ ; 3.  $l_0 = 40 \text{ cm}$ ;  
 4.  $l_{\text{eq}} = 25 \text{ cm}$  et  $k \approx 20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ;  
 5.  $\ddot{l}(t) + \frac{4\alpha}{m} \dot{l}(t) + \frac{4k}{m} l(t) = \frac{4k}{m} (l_0 - \frac{mg}{4k})$ ;

6.  $\omega_0 = \sqrt{4k/m}$  et  $Q = \sqrt{mk}/(2\alpha)$ ; 7.  
 $\alpha \approx 4900 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ; 9.  $\omega_0 \approx 6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  
 $Q \approx 0.7$ .

3 - 2.  $g = l\omega^2 \cos \alpha$ ; 3.  $\omega > \omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

4 - 3.  $R_S = \frac{2GM_A}{c^2}$ ; 4.  $R_T =$

$8.8 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $R_S = 2.9 \times 10^3 \text{ m}$ ; 5.  
 $M_{\text{Sgr A}^*} = (8.15 \pm 0.03) \times 10^36 \text{ kg}$ ; 7.  
 $1.2 \times 10^{10} \text{ m}$

5 - 1.  $v = 2\sqrt{\frac{eU}{m}}$ ; 3.  $d = 2\frac{\sqrt{U}}{B\sqrt{e}}(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})$ .

## 2 Frottements solides

**Exercice 6 - Brique sur un plan incliné :** On considère un plan incliné d'un angle  $\alpha = 20^\circ$  par rapport à l'horizontale. Une brique de masse  $m = 600$  g est lancée depuis le bas du plan vers le haut avec une vitesse  $\vec{v}_0$  de norme  $2.4$  m/s.

- On suppose que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements tangentiels. Déterminer la distance parcourue par la brique avant qu'elle ne s'arrête et le temps nécessaire pour atteindre ce point.
- On suppose maintenant qu'il existe des frottements solides où l'on prend le coefficient de frottement  $f = 0.2$ . Répondre à la même question dans ce cas.

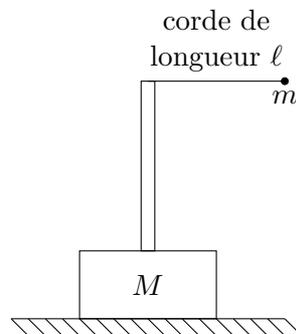
**Exercice 7 - Descente à ski :** Un skieur de masse  $m$  descend une piste faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement de la forme  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$  où  $\lambda$  est un coefficient constant positif et  $\vec{v}$  la vitesse du skieur. La neige exerce sur le skieur un frottement solide de coefficient dynamique  $f$ . On choisit comme origine de l'axe  $Ox$  la position initiale du skieur que l'on suppose partir avec une vitesse nulle et on note  $Oy$  la normale à la piste. On prend  $m = 80$  kg,  $\alpha = 45^\circ$  et  $\lambda = 10$  kg  $\cdot$  s $^{-1}$ .

- Déterminer la réaction normale exercée par la neige sur le skieur. On admet que la norme de la réaction tangentielle  $T$  vaut  $fN$  avec  $f = 0.05$ .
- Montrer que le skieur atteint une vitesse limite  $v_l$ . Calculer  $v_l$  (le record du monde de vitesse en ski est d'environ  $250$  km  $\cdot$  h $^{-1}$ ).
- Déterminer la vitesse du skieur au cours du temps.
- Calculer l'instant  $t_1$  où le skieur atteint une vitesse égale à  $v_l/2$ .
- À la date  $t_1$ , le skieur chute. On néglige alors la résistance de l'air mais le coefficient de frottement avec le sol est multiplié par  $100$ . Calculer la distance parcourue par le skieur dans cette position avant de s'arrêter.

En réalité, la modélisation pour les frottements de l'air n'est pas pertinente. On choisit donc maintenant  $\vec{F} = -K S v \vec{v}/2$ . On prendra  $K = 0.6$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$  et  $S = 0.4$  m $^2$ .

- En négligeant les frottements avec la piste montrer que le skieur atteint une vitesse limite  $v_l$ .

**Exercice 8 - Mouvement d'un pendule :** On lâche la bille de masse  $m$  à l'horizontale sans vitesse initiale. La corde est inextensible.



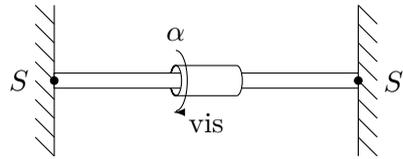
On supposera la liaison parfaite entre la corde et la barre verticale.

On note  $f_s$  le coefficient de frottement statique sur le sol et on néglige les masses de la corde et de la barre verticale.

- Donner l'expression de la norme  $T$  de la force de tension subie la masse  $m$  en fonction de l'angle  $\theta$  que fait le pendule avec la verticale et de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .
- En utilisant le fait que le mouvement du pendule est conservatif, en déduire  $T$  en fonction uniquement de  $\theta$ . Donner ensuite la norme  $T'$  de la force de tension subie par le sommet de la tige en fonction de l'angle  $\theta$ .
- En déduire l'équation permettant de vérifier la condition pour que  $M$  se mette à glisser.

**Exercice 9 - Barre de traction :** On considère une barre de traction en appui contre un mur aux points  $S$  et  $S'$ . La vis centrale peut tourner d'un angle  $\alpha$  avec un pas  $p = 0.15$  cm pour modifier la longueur totale de la barre, c'est-à-dire que la barre s'allonge de  $0.15$  cm lorsque  $\alpha$  réalise un tour complet.

Pour  $\alpha = 0$ , la barre tient juste au mur.

**Données :**

- ▷ loi de Hooke : la force interne exercée sur un solide de section  $S$  et de longueur  $\ell_0$  pour le raccourcir d'une longueur  $\delta\ell$  est de norme :  $F = SE\frac{\delta\ell}{\ell_0}$ , cette force compense la réaction normale,
- ▷ module de Young du fer :  $E = 10 \text{ GPa}$ ,
- ▷  $\ell_0 = 1 \text{ m}$  ;  $S = 1.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,
- ▷ coefficient de frottement sur le mur :  $f = 0.6$ .

Un homme de  $70 \text{ kg}$  veut faire des tractions avec une période  $T = 1 \text{ s}$ .

1. En supposant que le mouvement de l'homme est sinusoïdal, donner la force maximale subie par la barre.
2. En supposant que la barre reste parfaitement horizontale, donner la condition pour que celle-ci ne glisse pas sur le mur en fonction de l'élongation  $\Delta\ell$  de celle-ci.
3. En déduire l'angle  $\alpha$  dont il faut tourner la vis centrale pour que l'ensemble tienne en place.

**Exercice 10 - Chute d'un arbre mort :** Un bûcheron assimilé à un point matériel  $B$  de masse  $m$  souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse  $M$  avec  $M > m$ , de hauteur  $H$  et de section droite carrée de côté  $2a$  représenté sur la figure 1 (a).

Il tire pour cela sur un câble fixé en  $C$  à l'arbre, de longueur  $BC = \ell$  et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe  $(O, \vec{u}_y)$  dirigé par le vecteur  $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$ .

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force  $\vec{R}_1 = T_1\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$  appliquée au point  $O$  et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement  $f$ . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force  $\vec{R}_2 = T_2\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$  appliquée au point  $B$  et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement  $f$ . Les composantes  $T_1, N_1, T_2$  et  $N_2$  sont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note  $\vec{F}$  la force exercée par le câble sur l'arbre au point  $C$  supposée parallèle au câble et  $F$  sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens direct autour de  $(O, \vec{u}_y)$  et on note  $\alpha$  l'angle (positif) entre  $\vec{BO}$  et  $\vec{BC}$ .

1. Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 1 (a). Exprimer  $N_2$  et  $T_2$  en fonction de  $F, \alpha, m$  et  $g$ . En déduire l'expression de la valeur maximale  $F_{\max}$  de  $F$  en fonction de  $f, m, g$  et  $\alpha$ .
2. L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 1 (a). Exprimer  $N_1$  et  $T_1$  en fonction de  $F, \alpha, M$  et  $g$ . En déduire que, pour  $0 \leq F \leq F_{\max}$ , le glissement n'est pas possible en  $O$ .
3. Exprimer le moment  $\Gamma_g$  du poids de l'arbre par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_y)$  dans la situation initiale décrite par la figure 1 (a).
4. Soit  $\Gamma_B$  le moment par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_y)$  exercé par le bûcheron sur l'arbre *via* le câble. Quelle est la valeur minimale de  $\Gamma_B$  permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe  $(O, \vec{u}_y)$  ?
5. En supposant  $F$  constant, justifier qu'il existe une valeur optimale  $\alpha_m$  de l'angle  $\alpha$ .

On suppose que, quel que soit l'angle  $\alpha$ , l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement :  $F$  prend la valeur  $F_{\max}$ .

6. Montrer que le moment  $\Gamma_B$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_y)$  exercé par le bûcheron *via* le câble s'écrit :

$$\Gamma_B = \frac{mg\ell}{\phi(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

En déduire l'expression de  $\alpha_m$  en fonction de  $f$ . Vérifier que  $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$  pour  $f = 1$ .

7. On donne  $M = 1 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $H = 20 \text{ m}$ ,  $a = 0.5 \text{ m}$ ,  $m = 1 \times 10^2 \text{ kg}$  et  $f = 1$ . Calculer la force  $F_{\max}$  et la longueur de la corde  $\ell$  nécessaires pour initier la rotation de l'arbre. Commenter.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe  $(O, \vec{u}_y)$ , repérée par l'angle  $\theta$  que fait  $\vec{OC}$  avec  $(O, \vec{u}_z)$ .

8. Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $\mathcal{E}_p$  de l'arbre en fonction de  $M, g, H, a$  et  $\theta$ . Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. À partir de quel angle  $\theta_s$  peut-il lâcher le câble ?

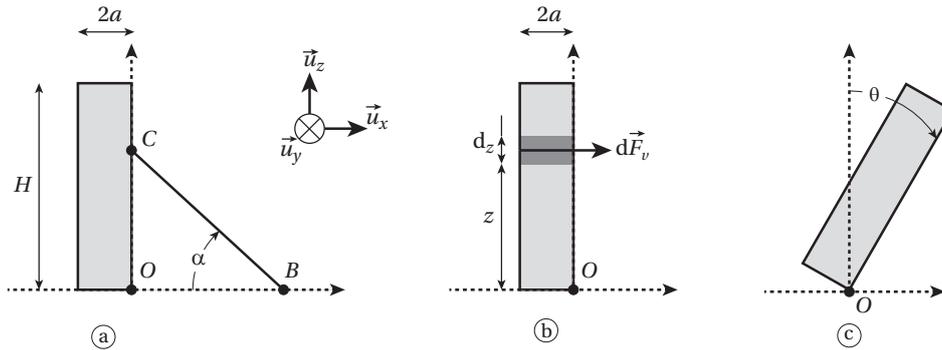


Fig. 1 – Chute d'un arbre

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p><b>6</b> - 1. 0.86 m ; 2. 0.55 m.</p> <p><b>7</b> - 2. <math>v_l \approx 190 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}</math> ; 4. <math>\tau = m/\lambda = 8 \text{ s}</math> et <math>t_1 = \tau \ln 2 \approx 5.5 \text{ s}</math> ; 5. <math>t_2 \approx 0.9 \text{ s}</math> et <math>\Delta x \approx 13 \text{ m}</math> ; 6. <math>v_l = \sqrt{2mg \sin \alpha / (KS)} \approx 68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}</math>.</p>	<p><b>8</b> - 1. <math>T = m(g \cos(\theta) + \ell \dot{\theta}^2)</math> ; 2. <math>T' = 3mg \cos(\theta)</math> ; 3. <math> \sin(2\theta)  = 2f_s \left( \frac{M}{3m} + \cos^2(\theta) \right)</math>.</p> <p><b>9</b> - 1. <math>F_{\max} = mg + m\omega^2 z_0</math> ; 2. <math>\frac{m\ell_0}{fES} \left( g + \frac{4\pi^2}{T^2} z_0 \right) &lt; \Delta \ell</math> ; 3. 0.1 tours.</p>	<p><b>10</b> - 1. <math>F_{\max} \cos(\alpha) = f(mg - F_{\max} \sin(\alpha))</math> ; 3. <math>\Gamma_g = -Mga</math> ; 4. <math>\Gamma_B = Mga</math> ; 5. <math>\alpha_m = \frac{\pi}{4}</math> ; 6. <math>\alpha_m = \arctan\left(\frac{1}{f\frac{1}{3}}\right)</math> ; 7. <math>7 \times 10^2 \text{ N}</math> et <math>14 \text{ m}</math> ; 8. <math>\theta_s = \arctan\left(\frac{2a}{H}\right)</math>.</p>
---	---	--

### 3 Cinématique et changement de référentiels

**Exercice 11 - Déplacement sur une roue :** Une roue de rayon  $a$  et de centre  $C$  roule sans glisser sur  $Ox$  tout en restant dans le plan  $(O, x, y)$ . Un point  $A$  de la roue coïncide à l'instant  $t = 0$  avec l'origine  $O$  du repère. Le centre  $C$  a une vitesse constante  $v_0$ .

Les angles seront repérés par rapport à la verticale ascendante.

Après avoir fait un schéma, justifier que  $v_0 = a\omega$  puis calculer le module de la vitesse en  $A$  et étudier ses variations au cours du temps en considérant son mouvement comme composé de deux mouvements.

**Exercice 12 - Déplacement sur un manège :** Soit un plateau de manège tournant à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . Un forain, assimilé à un point matériel  $M$ , part du centre  $O$  et marche uniformément le long d'un rayon de plateau à la vitesse  $u$ . Déterminer la vitesse et l'accélération absolue du forain :

1. en utilisant l'équation de la trajectoire absolue en coordonnées polaires ;
2. en utilisant les lois de composition des mouvements.

<p><b>Éléments de réponse :</b></p>	<p><b>11</b> - <math>v = 2v_0 \cos(\omega t/2)</math>.</p>	<p><b>12</b> - <math>\vec{v} = u\vec{e}_r + ut\omega\vec{e}_\theta</math> d'où <math>\vec{a} = -ut\omega^2\vec{e}_r + 2u\omega\vec{e}_\theta</math>.</p>
-------------------------------------	--	--

### 4 Mécanique en référentiel non galiléen

**Exercice 13 - Application de la force d'inertie d'entraînement :** Pour ces deux exemple, on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. L'Airbus A310 zéro-G est un avion exploité pour créer des situations d'apesanteur : la résultante des forces et le moment résultant des forces exercées sur un solide dans le référentiel de l'avion est proche de zéro.



On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à l'avion et on néglige la rotation de l'avion au cours de son mouvement.  $\mathcal{R}$  est donc en translation dans  $\mathcal{R}_g$ .

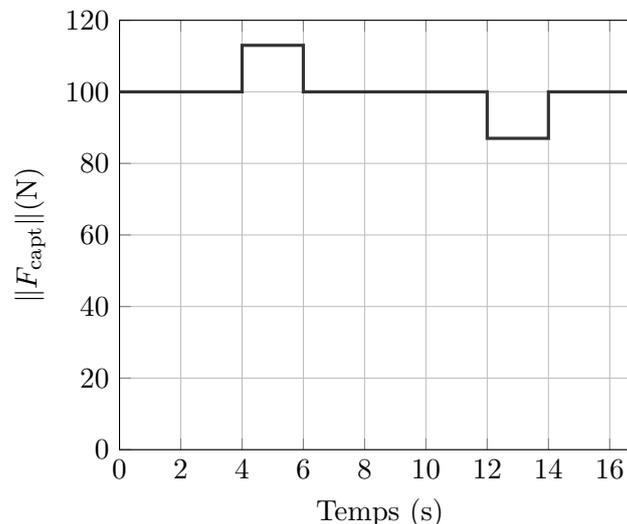
Quel doit être le mouvement de l'avion dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen pour que les passagers soient en état d'impesanteur ?

2. Le manège de « La Centrifugeuse » est constitué d'un énorme cylindre vertical qui tourne autour de son axe. Les passagers pénètrent à l'intérieur et s'installent contre la paroi du cylindre. Le cylindre est mis en rotation, d'abord lentement, puis de plus en plus vite. Quand la vitesse de rotation est suffisamment grande, le plancher est retiré et les passagers restent collés contre la paroi du cylindre.



- (a) Expliquer qualitativement pourquoi les passagers restent collés contre la paroi.  
 (b) On appelle  $\mu$  le coefficient de frottement solide des passagers sur la paroi. Déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation du cylindre (en fonction du rayon du cylindre  $a$ , de  $g$  et de  $\mu$ ) à partir de laquelle on peut retirer le plancher.  
 A. N. :  $a = 4$  m,  $\mu = 0.8$ . Calculer la vitesse minimale de rotation du cylindre en tours par minute.

**Exercice 14 - Un parpaing dans un ascenseur :** On considère un parpaing posé sur un capteur de force dans un ascenseur. L'ascenseur se trouve initialement au 2<sup>e</sup> étage et se met en mouvement à partir de  $t = 4$  s comme le montre le graphique ci-dessous.



**Fig. 2** – Relevé du capteur de force en fonction du temps.

$F_{\text{capt}}$  représente la force exercée sur le dessus du capteur. On notera que, d'après le graphe,  $F_{\text{max}} = 113$  N et  $F_{\text{min}} = 87$  N. Chaque étage mesure 3 m de hauteur.

- Déterminer la masse du parpaing.
- Déterminer le nombre d'étage(s) parcouru(s) et l'étage d'arrivée.

**Exercice 15 - Détermination de  $f_s$  sur une photographie :** À l'aide de la photo ci-dessous, on va estimer le coefficient de frottement statique des pneus utilisés en MotoGP sur la route.

On pourra considérer la vitesse de la moto comme constante au cours du virage.

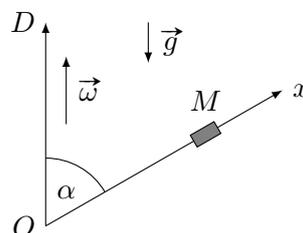


Fig. 3 – Virage en MotoGP.

On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de centre  $O$  le centre du virage, et dont  $OG$  est un axe fixe avec  $G$  le centre de gravité du système.  $\mathcal{R}$  suit la rotation de la moto dans le virage.

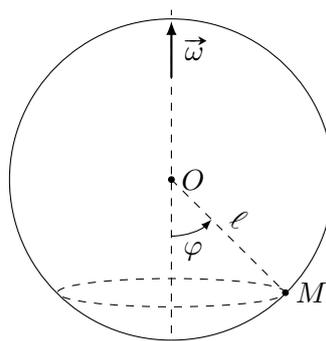
1. Écrire la condition d'équilibre de la moto dans  $\mathcal{R}$ .
2. En utilisant la condition sur les moments, établir l'expression de l'angle de la moto en fonction des normes  $P$  du poids et  $F_{ie}$  de la pseudo-force d'inertie d'entraînement.
3. En utilisant la condition sur les forces, en déduire un minorant du coefficient de frottement statique  $f_s$ .

**Exercice 16 - Anneau sur une tige en rotation :** Un axe matériel  $Ox$  est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à un axe vertical  $D$ . L'axe  $Ox$  est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de  $D$ . Un solide  $M$  assimilable à un point matériel, de masse  $m$ , coulisse sans frottement sur l'axe  $Ox$ .



1. Déterminer la position d'équilibre relatif  $M_0$  de  $M$  sur  $Ox$ . On posera  $\Omega = \omega \sin(\alpha)$ .
2.  $M$  est abandonné sans vitesse relativement à  $Ox$  à une distance  $a$  de  $M_0$ , telle que  $\overrightarrow{M_0M}(t=0) = a\vec{u}_x$ . Donner l'expression de  $\xi = M_0M$  en fonction du temps. Quelle est la nature de la position d'équilibre  $M_0$  ?
3. Dans le cadre du mouvement décrit à la question précédente, calculer à l'instant  $t$  la composante de l'action de  $M$  sur  $Ox$  perpendiculaire au plan  $DOx$ .

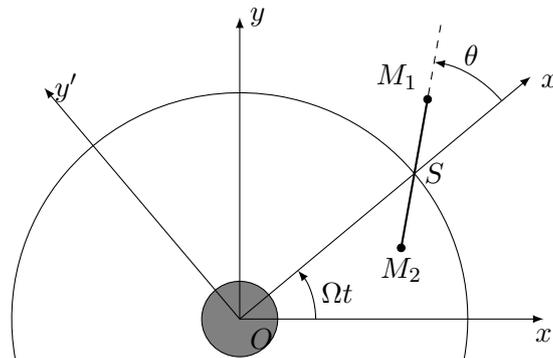
**Exercice 17 - Équilibre relatif :** On considère un cerceau en rotation sur lequel coulisse une bille sans frottement.



On considère que le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  est galiléen. On note  $\mathcal{R}$  le référentiel lié au cerceau en rotation à la vitesse  $\vec{\omega}$  par rapport à  $\mathcal{R}_T$ . On se place en régime permanent de rotation ( $\vec{\omega} = \overline{Cte}$ ).

1. Trouver les positions d'équilibre de la bille  $M$ , discuter leur stabilité.
2. Donner l'équation de son mouvement dans  $\mathcal{R}$  (sans chercher à la résoudre).

**Exercice 18 - Stabilisation d'un satellite par gradient de gravité :** La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVII<sup>e</sup> siècle, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.



**Modèle :** le satellite est constitué de deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masses identiques  $m = \frac{1}{2} \times M_S$  reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur  $2\ell$ .

Le barycentre  $S$  du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon  $r_0 = R_T + h$  (avec  $h \ll R_T$ ). Le référentiel géocentrique ( $\mathcal{R}$ ) lié au repère  $(Oxyz)$  est supposé galiléen. Le plan orbital est  $Oxy$ .

Le référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) défini par le repère  $(Ox'y'z')$  lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire  $\Omega$ . Les points  $M_1$  et  $M_2$  sont dans le plan orbital :  $\overrightarrow{OS} = r_0 \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{OM_1} = r_1 \vec{u}_1$  et  $\overrightarrow{OM_2} = r_2 \vec{u}_2$  où  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont unitaires. On appelle  $\theta$  l'angle de  $M_2M_1$  avec l'axe  $Ox'$  de ( $\mathcal{R}'$ ). On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

On note  $G$  la constante universelle de gravitation.

1. Exprimer les forces gravitationnelles  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  qui agissent sur  $M_1$  et  $M_2$ .
2. Exprimer dans ( $\mathcal{R}'$ ) les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur  $M_1$  et  $M_2$ , en fonction de  $m$ ,  $\Omega$ ,  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ . Exprimer dans ( $\mathcal{R}'$ ) les forces d'inertie de Coriolis qui agissent sur  $M_1$  et  $M_2$ , en fonction de  $m$ ,  $\Omega$ ,  $\overrightarrow{SM_1}$ ,  $\overrightarrow{SM_2}$  et  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ .
3. Montrer que, dans ( $\mathcal{R}'$ ), le moment des forces d'inertie de Coriolis en  $S$  est nul. Établir que, dans ( $\mathcal{R}'$ ), le moment résultant calculé en  $S$  des actions extérieures a pour amplitude, pour  $\ell \ll r_0$  :

$$\Gamma_s = 6GmM_T \frac{\ell^2}{r_0^3} \sin(\theta) \cos(\theta).$$

Préciser la direction et le sens de ce moment cinétique.

4. Appliquer le théorème du moment cinétique dans ( $\mathcal{R}'$ ). Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de  $\theta$  qui correspondent à une position d'équilibre dans ( $\mathcal{R}'$ ).
5. Montrer que  $\theta = 0$  est une position d'équilibre stable. Existe-t-il une position d'équilibre instable ? Quelle est la forme de l'équation différentielle pour les petits mouvements autour de cette position d'équilibre instable ?

**Exercice 19 - Étude du TGV :** Lors d'un essai réalisé durant la campagne préalable à la tentative de record sur une voie approximativement rectiligne et plus ou moins horizontale, on a relevé les données suivantes.

$t(\text{s})$	0	70	95	124	155	231	263	332
$V(\text{km/h})$	0	150	200	250	300	350	400	450

- Calculer, sur chaque intervalle de mesure, les valeurs de l'accélération moyenne de la rame. On exprimera ces valeurs en  $\text{m/s}^2$  dans un tableau récapitulatif. Estimer la distance parcourue nécessaire pour atteindre la vitesse de  $450 \text{ km/h}$ .
- Un journaliste convié à cet essai avait apporté un petit pendule simple qu'il avait suspendu au plafond de la voiture. Il comptait, selon ses mots, « mettre en évidence la grande vitesse du train ». Sa méthode permettait-elle réellement de mettre la vitesse du train en évidence ? Quelle a été, en régime permanent, l'inclinaison maximale du pendule par rapport à la verticale durant l'essai ?

Sur le tronçon de la voie d'essai, il y avait quelques virages. Dans la suite, nous prendrons comme exemple le virage situé entre les points kilométriques 190 et 197 de la voie, de longueur d'arc  $s = 6323 \text{ m}$  et de rayon de courbure  $\chi = 16\,667 \text{ m}$  tournant à gauche. Ce virage est parcouru à la vitesse constante de  $540 \text{ km/h}$ . Les faces internes des rails sont distantes de  $\ell_r = 1435 \text{ mm}$ . Les centres de gravité des remorques sont approximativement situés à une hauteur  $h = 2.5 \text{ m}$  du rail.

On considère le cas hypothétique d'une voie sans dévers, c'est-à-dire que les deux rails sont dans le même plan horizontal.

- La transition entre la voie rectiligne et la voie en virage se fait par l'intermédiaire d'un tronçon de raccordement parabolique de longueur  $130 \text{ m}$ . Quelle est la durée de cette phase de transition ? Qu'ont ressenti les passagers se tenant debout dans les voitures durant le franchissement du tronçon de transition ? On traduira ces effets de façon quantitative en exprimant les valeurs extrêmes de la force ressentie par un passager de masse  $m_p = 75 \text{ kg}$  se tenant au centre du train.
- Un verre d'eau posé sur la tablette devant un passager mettrait en évidence la force d'inertie présente dans le virage de deux manières différentes. Lesquelles (on ne demande aucun calcul) ?
- À quelle vitesse maximale théorique le train peut-il parcourir le virage sans risque de décollement des roues ?

**Éléments de réponse :**

- 13 - 1.  $\vec{g} = \vec{a}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g}$  ; 2.  $\omega_{\min} = 1.8 \text{ rad/s}$ .  
 14 - 1.  $m = 10 \text{ kg}$  ; 2. 9<sup>e</sup> étage.  
 15 - 3.  $f_s > 1.7$   
 16 - 1.  $x_0 = \frac{g}{\Omega^2} \cos(\alpha)$  ; 2.

$$\xi(t) = a \cosh(\Omega t) ; 3. R_z = 2m\Omega \dot{x} = 2m\Omega^2 a \sinh(\Omega t).$$

$$17 - 1. \varphi = 0 \text{ (stable si } \omega < \sqrt{\frac{g}{\ell}}), \varphi = \pi \text{ (instable), } \cos(\varphi) = \frac{g}{\ell\omega^2} \text{ (stable si elle existe) ; 2. } \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin(\varphi) - \omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) =$$

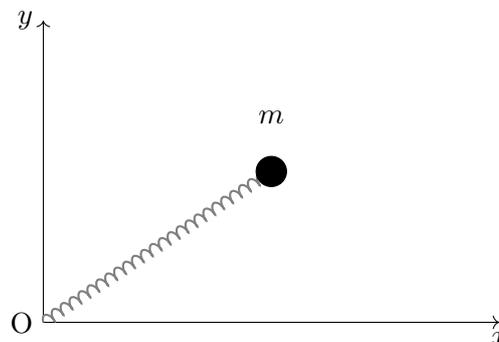
$$0.$$

$$18 - 2. \vec{F}_{ie1} = m\Omega^2 \overrightarrow{OM_1}, \vec{F}_{ie2} = m\Omega^2 \overrightarrow{OM_2}, \vec{F}_{ic1} = 2m\Omega \dot{\theta} \overrightarrow{SM_1}, \vec{F}_{ic2} = 2m\Omega \dot{\theta} \overrightarrow{SM_2} ; 4. \theta_{\text{eq}} = 0 \left[ \frac{\pi}{2} \right].$$

$$19 - 1. 25.2 \text{ km} ; 2. 3.4^\circ ; 3. 10^3 \text{ N} ; 5. 779 \text{ km/h}.$$

## 5 Sujets d'oraux

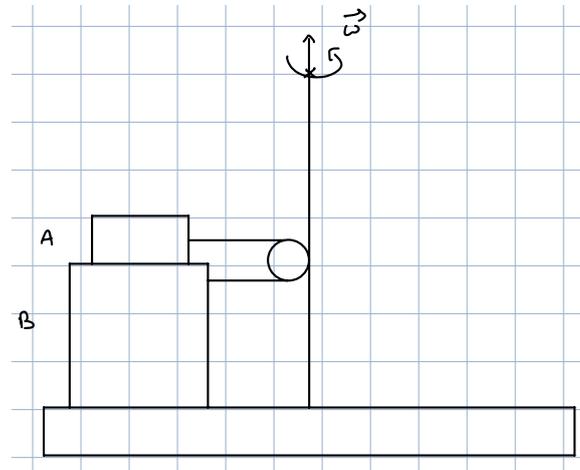
**Exercice 20 - Ressort en rotation (Centrale) :** On considère une masse  $m$  à l'extrémité d'un ressort (de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ ) astreint à se déplacer sur le plan  $Oxy$ . On donne une vitesse initiale à la masse.



- Établir l'énergie potentielle effective  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ . En déduire les différents types de mouvements possibles.
- À quelle condition a-t-on une trajectoire circulaire ?
- On suppose que la distance à vide  $\ell_0$  est négligeable. Que devient le rayon de la trajectoire circulaire ?

**Exercice 21 - Plateau tournant (Mines Pont) :** On considère le système ci-dessous. A et B sont reliés par un fil inextensible enroulé sur une poulie. On note  $m_A$  et  $m_B > m_A$  leurs masses et ils sont situés à la distance  $r$  égale de l'axe de rotation du plateau tournant. Celui-ci tourne à la vitesse angulaire fixée  $\omega$ . On note  $\mu$  le coefficient de frottement entre A et B et entre B et le plateau.

Donner la vitesse  $\omega_{\text{lim}}$  de mise en mouvement du système.



**Exercice 22 - Stick-slip (Mines Pont) :** On considère une masse  $m$  accrochée à un ressort horizontal de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Cette masse est déposée sur un tapis roulant horizontal de vitesse constante  $\vec{v}_0$ , dirigé de sorte à ce que la masse s'éloigne du point d'accroche fixe du ressort. On note  $f_s$  le coefficient de frottement statique entre la masse et le tapis roulant et  $f_d < f_s$  le coefficient de frottement dynamique entre la masse et le tapis roulant. On prend  $f_s = 2f_d = 2f$ .

On pose un axe  $x$  de sorte que l'origine des  $x$  coïncide avec la longueur à vide du ressort et l'axe  $\vec{e}_x$  est dirigé du point d'accroche du ressort vers la masse mobile. On considère la masse en  $x(0) = 0$  et on suppose que le régime de frottement statique est atteint.

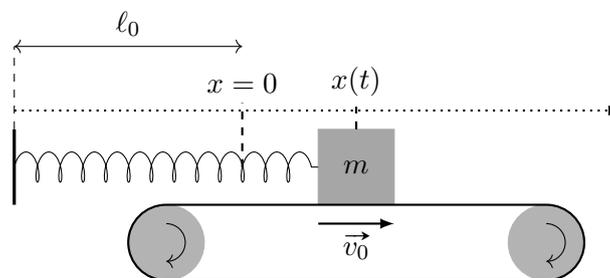


Fig. 4 – Schéma du « stick-slip » sur tapis roulant

1. Quel est le mouvement à  $t = 0^+$  ?
2. Déterminer l'instant  $t_1$  où le glissement commence. Déterminer  $x(t_1) = x_1$ .
3. Établir l'équation différentielle du mouvement pour  $t > t_1$ . On posera  $\omega = \sqrt{k/m}$ .
4. Résoudre cette équation différentielle et déterminer le mouvement. Vérifier qu'on n'a plus de glissement pour  $x = 0$ .
5. Dessiner l'allure de la courbe du mouvement.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>20 - 3. <math>R = (mC^2/k)^{1/4}</math>.</p>	<p>21 - <math>\omega_{\text{lim}}^2 = \mu \frac{3m_A + m_B}{m_B - m_A} \frac{g}{r}</math>.</p>	<p>22 - 2. <math>x_1 = 2fmg/k</math>; 4. <math>x(t) = \frac{x_1}{2} (\cos(\omega(t - t_1)) + 1) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega(t - t_1))</math>.</p>
--	--	--

## 6 Pour aller plus loin : statique des fluide

**Exercice 23 - Hémisphères de Magdebourg :** Au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle, Otto von Guericke, bourgmestre de la ville allemande de Magdebourg, ayant mis au point une pompe à vide, présenta une expérience spectaculaire. En prenant deux hémisphères métalliques de  $R = 28$  cm de rayon munis chacun d'un crochet

en son sommet, il les joignit pour former une sphère et en pompa l'air intérieur grâce à sa pompe. Deux équipages de seize chevaux furent alors attelés chacun à un crochet d'une hémisphère et entraînés en sens opposé pour essayer de les séparer, en vain.

Déterminer la force qu'auraient dû exercer les chevaux pour parvenir à séparer les hémisphères.

**Exercice 24 - Modèle d'atmosphère :** L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M$ . On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol  $z = 0$ , la pression est  $P_0$  et la température  $T_0$ .

- On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude  $z$  selon la loi  $T(z) = T_0 - \lambda z$  (avec  $\lambda > 0$ ) avec  $\lambda = 5.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ .
  - Montrer que la pression à l'altitude  $z$  est de la forme  $P(z) = P_0 (1 - \lambda z/T_0)^{T_0/(\lambda H)}$ .
  - Calculer dans ce modèle la pression au sommet de l'Everest (8850 m).
- Pour  $z \ll H$  montrer que les résultats obtenus à l'aide de ce modèle et de celui de l'atmosphère isotherme conduisent à une même fonction affine  $P(z)$  donnant la pression en fonction de l'altitude.

**Exercice 25 - Liquide en rotation :** Soit un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ , rempli d'eau liquide de masse volumique  $\rho$  jusqu'à une hauteur  $h_E$  (en l'absence de rotation), en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse constante  $\omega$ . On se place en régime permanent.

- Exprimer en coordonnées cylindriques l'accélération d'une particule fluide de masse  $\rho dV$  dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Projeter la relation fondamentale de l'hydrostatique des axes pertinents.
- Montrer que vue en coupe, la surface libre de l'eau est une parabole. Établir son équation.
- À quelle hauteur  $z_0$  se trouve le fond de la surface libre quand le cylindre tourne à  $\omega$  ?
- À quelle vitesse minimale  $\omega_1$  faut-il tourner pour voir le fond du cylindre à sec ?
- À quelle vitesse  $\omega_2$  faut-il tourner pour voir le liquide déborder ?

**Exercice 26 - Équilibre d'un bouchon de liège :** Un bouchon de liège cylindrique de hauteur  $H = 5.0 \text{ cm}$  et de section  $s = 2.0 \text{ cm}^2$  est placé verticalement dans une éprouvette graduée également cylindrique, et de diamètre légèrement supérieur. Les frottements sur les parois sont négligés, et on considère que le bouchon reste vertical. L'éprouvette contient une quantité d'eau suffisante pour que le bouchon flotte sans toucher le fond.

- Déterminer la hauteur de liège immergée.
- On pose sur le bouchon une pièce de monnaie de masse  $m = 3.0 \text{ g}$ . Quelle est la nouvelle hauteur immergée ?
- On retire brusquement la pièce. Le bouchon oscille alors verticalement. Déterminer la période de ses oscillations et faire l'application numérique.
- Comment ces résultats sont-ils modifiés si on remplace le liège par une cheville cylindrique de chêne de même dimensions, et que l'éprouvette est remplie de deux volumes égaux d'eau et de cyclohexane, qui ne sont pas miscibles ?

*Données :* densité du liège :  $d_l = 0.25$ , densité du chêne :  $d_c = 0.85$ , densité du cyclohexane :  $d_{cy} = 0.78$ .

**Exercice 27 - Force de Coriolis et écoulement d'un fleuve :** Un fleuve coule dans la direction Nord-Sud à la vitesse  $v = 1 \text{ m/s}$  en un lieu de latitude  $\lambda = 45^\circ$  où sa largeur est  $\ell = 200 \text{ m}$ .

- Quelles sont les forces s'exerçant sur un petit volume d'eau ?
- Calculer la dénivellation entre les deux rives due à la force de Coriolis.

Éléments de réponse :

23 -  $2.5 \times 10^4 \text{ N}$ .

24 - 2.  $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{25} - 2. z_{\text{libre}} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0; 4. \sqrt{\frac{4gh_E}{R^2}}; \\ 5. \sqrt{\frac{4g(H - h_E)}{R^2}}. \end{array} \right\}$$

26 - 1. 1.3 cm ; 2. 2.8 cm ; 3. 0.22 s ; 4. 0.88 s.

27 - 2. 2 mm.