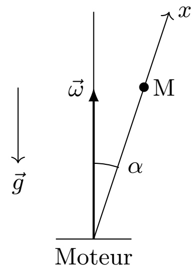
Colle n° 10 : Mécanique 4 - Thermo 2

Exercice 1 - Anneau sur une tige en rotation : Un axe Ox est animé par rapport à un axe vertical D d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

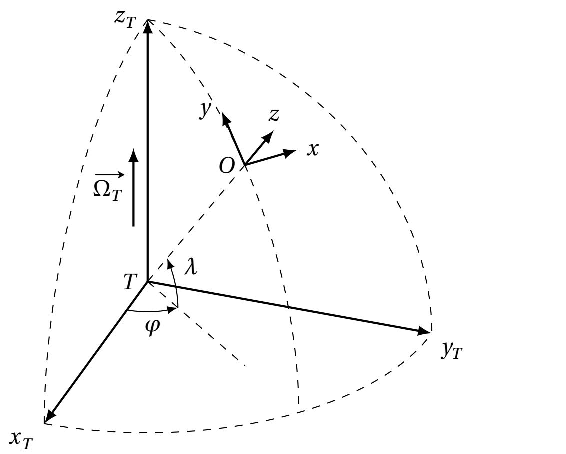


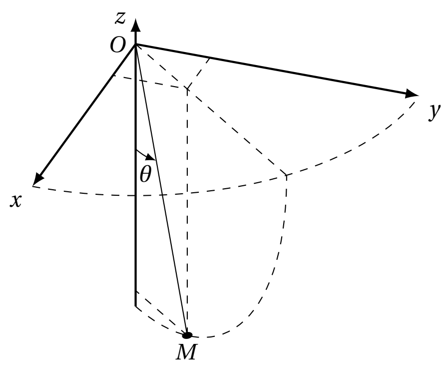
On note α l'angle que forme Ox et D. M est une particule de masse m qui coulisse sans frottements le long de Ox.
On se place dans le référentiel R lié à la tige.

1. Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ de M.
2. Déterminer la position d'équilibre relative M_0 de M. Préciser sa stabilité.
3. Retrouver ce résultat par la relation fondamentale de la dynamique.

Exercice 2 - Pendule de Foucault : On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle au point M (masse $m = 360\,\mathrm{kg}$) suspendue à l'extrémité inférieure d'un filin inextensible de longueur $\ell = 67\,\mathrm{m}$. L'autre extrémité est fixée en un point O, placé à une hauteur égale à ℓ sur la verticale d'un lieu de latitude λ.

1. Expliciter l'équation du mouvement dans la base du référentiel terrestre local $\mathcal{R}(Oxyz)$, Oz étant la verticale ascendante et Ox l'axe local orienté vers l'est (les notations sont précisées sur le schéma ci-dessous). On notera la tension du fil sous la forme $\vec{T} = -T\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\ell}$.





2. On suppose que l'angle de déviation du pendule par rapport à la verticale est suffisamment faible pour considérer que le mouvement de la masse s'effectue dans le plan xOy. Déduire de la question précédente que les équations différentielles du mouvement dans le plan horizontal s'écrivent :

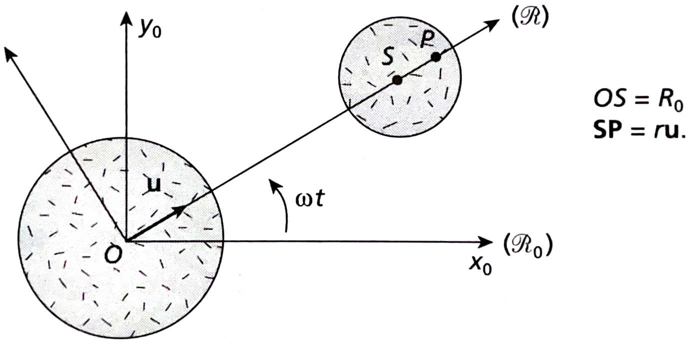
$$\ddot{x} - 2\Omega_T\dot{y}\sin(\lambda) + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{y} + 2\Omega_T\dot{x}\sin(\lambda) + \omega_0^2 y = 0\,,$$

Ω_T étant la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

3. Résoudre le système d'équations différentielles précédent par la méthode complexe en posant $X = x + \mathrm{j}y$, sachant qu'initialement $x = x_m$, $y = 0$, et la vitesse nulle.
4. Sachant que, dans l'expression de $X(t)$, le terme $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_T\sin(\lambda)t}$ représente une rotation d'une base (x_2, y_2) autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire de rotation $-\Omega\sin(\lambda)$, quelles sont les expressions de $x_2(t)$ et $y_2(t)$ dans ce système d'axes tournant autour de la verticale ? En déduire la nature de la trajectoire dans ce système d'axes tournants.
Quelle est la durée d'un tour complet du pendule étudié ? Application numérique pour les latitudes
$\lambda = 0°; 48.8°$ (latitude du pendule de Foucault du musée des Arts et Métiers) et $90°$.

Exercice 3 - Évaluation de la limite de Roche : Une planète supposée sphérique, de centre O, de rayon R_p et de masse M_p est supposée fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$. Un satellite sphérique également de centre S, de rayon R_s et de masse M_s décrit dans $\mathcal{R}_0$ une orbite circulaire de rayon R_0 autour de O.

Le satellite est supposé en rotation synchrone autour de la planète : par hypothèse la direction OS reste fixe par rapport au satellite. La planète et le satellite sont supposés tous deux homogènes.



On suppose que dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$, lié à la direction OS, un point P du satellite, de masse m, est en équilibre sous l'action des forces extérieures suivantes : la force de gravitation de la planète, la force d'inertie d'entraînement et de la force d'attraction due aux différentes parties du satellite.

On se limite ici aux points P situés sur OS et on pose $\mathbf{SP} = r\mathbf{u}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire porté par $\mathbf{OS}$; on suppose $|r| \ll R_0$.

1. Soit ω la vitesse angulaire de S sur son orbite. Exprimer ω^2 en fonction de $\mathcal{G}$, M_p et R_0.
2. Calculer la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le point P.
3. Montrer que si l'on ne tient pas compte des forces de cohésion interne à la matière, ceci impose une limite inférieure R_L à R_0 en dessous de la quelle le satellite se disloque. Exprimer cette limite dans le cadre de nos hypothèses en donnant l'expression de R_L en fonction de R_p, ρ_p (masse volumique de la planète) et ρ_s (masse volumique du satellite).

La masse volumique moyenne de Saturne est $600\,\text{kg}\cdot\ \text{m}^{-3}$; son rayon équatorial est $60\,400\,\text{km}$. Son satellite le plus proche est Atlas XV, sa distance moyenne à Saturne est $137\,670\,\text{km}$, son diamètre est de $40\,\text{km}$ environ et sa masse volumique est sans doute voisin de $1200\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

En tenant compte d'un modèle plus complet prenant compte tous les effets de l'astre, on trouve en réalité $R_L = 2.44\left(\dfrac{\rho_\text{p}}{\rho_\text{s}}\right)^{1/3} R_\text{p}$.

4. Calculer la limite de Roche et commenter les résultats.

Exercice 4 - Comportement thermique de la Terre : Afin d'étudier le comportement thermique d'une planète tellurique en régime stationnaire, on la modélise par une sphère homogène de rayon R_T, de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ supposées uniformes. La distribution de température dans la planète est à symétrie sphérique, et l'interaction avec l'atmosphère impose une température de surface T_S uniforme également. Afin d'évaluer l'impact thermique de la radioactivité de la croûte superficielle d'épaisseur $R_T - R_C$, on suppose en outre que :

- pour $r \in [0, R_C[$, on néglige toute production d'énergie radioactive ;
- pour $r \in [R_C, R_T]$, des réactions nucléaires libèrent une puissance massique α.

1. Par une étude de symétries et d'invariances, déterminer la direction du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_\text{th}}$, ainsi que les variables dont il dépend.
2. En procédant à un bilan énergétique à travers une calotte sphérique d'épaisseur dr, établir la forme du profil de température $T(r)$ de la planète. On distinguera la croûte de la planète interne.
3. Définir les conditions aux limites permettant de calculer les constantes d'intégration du profil $T(r)$. Montrer alors que l'on obtient dans la croûte :
$$T(r) = -\frac{\rho\alpha}{6\lambda}r^2 - \frac{\rho\alpha R_C^3}{3\lambda r} + \frac{\rho\alpha}{6\lambda}\left(R_T^2 + \frac{2R_C^3}{R_T}\right) + T_S$$
4. Déterminer l'expression de la température au centre de la planète dans ce modèle. Discuter son application numérique.
5. Sur Terre, le gradient de température en surface est d'environ $30\,°\text{C/km}$ sur les plaines continentales. Le modèle étudié ici permet-il d'en rendre compte ? Quel phénomène influence aussi la valeur du gradient de surface actuel sur Terre ?

Données : Épaisseur de la croûte : $R_T - R_C = 30\,\text{km}$, rayon de la planète : $R_T = 6370\,\text{km}$, masse volumique : $\rho = 2800\,\text{kg/m}^3$, puissance massique radioactive : $\alpha = 5\times10^{-10}\,\text{W/kg}$, conductivité thermique : $\lambda = 4\,\text{W/(m}\cdot\text{K)}$, température de surface : $T_S = 17\,°\text{C}$.

Exercice 5 - Ailette de refroidissement : On considère l'atelier d'un souffleur de verre, disposant d'un four à la température T_f, dans lequel il introduit l'extrémité d'une perche en fonte, considérée pleine, de rayon $a = 1.0\,\text{cm}$ et de longueur $L = 2.0\,\text{m}$. Le reste de la perche baigne dans une atmosphère à la température T_a.

1. Établir l'équation différentielle qui modélise le transfert de chaleur dans la perche en régime stationnaire au contact de l'atmosphère.
2. Estimer à quelle distance on peut empoigner la perche sans risquer de se brûler. On considérera un four qui fonctionne à $1150\,°\text{C}$ en régime établi, une perche de conductivité thermique $\lambda_\text{fonte} = 55\,\text{W/(m}\cdot\text{K)}$, et une atmosphère à $30\,°\text{C}$ qui présente au contact de la perche un coefficient de Newton $h = 10\,\text{W/(m}^2\cdot\text{K)}$.