Colle n° 11 : Thermo 3 - Optique 1

Exercice 1 - Dimensionnement d'un igloo : La construction d'un igloo qui puisse abriter des chasseurs inuits pendant plusieurs semaines nécessite de faire des choix bien réfléchis. On considère ici un igloo hémisphérique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b, reposant sur un sol neigeux. Les conditions extérieures sont inhospitalières : le vent souffle en continu et la température extérieure est de $-20\,°\mathrm{C}$.

1. Déterminer l'expression de la résistance thermique de l'igloo, en négligeant dans un premier temps la conducto-convection et les transferts thermiques dans le sol. Les chasseurs disposent de blocs de glace et de blocs de neige compactée ; quel matériau est-il préférable d'utiliser pour tailler les briques de l'igloo ?
2. Conçu pour trois chasseurs, l'igloo est construit de façon à ce que la température intérieure T_{int} ne descende pas sous $0\,°\mathrm{C}$. Calculer l'épaisseur minimale $e = b - a$ de l'igloo, sous les hypothèses précédentes.
3. On choisit une épaisseur de paroi hémisphérique égale à celle du cas limite précédent. Calculer la température T_{int} en tenant maintenant compte de la conducto-convection aux interfaces air/paroi. Discuter.
4. Afin que la ventilation de l'igloo ne remplace pas en permanence l'air intérieur chaud par de l'air froid, un tunnel souterrain est creusé dans l'entrée de l'igloo pour accéder à la chambre en passant sous le mur d'enceinte. Les pertes de chaleur sont alors faibles, car l'air froid est piégé dans ce tunnel, et la température à l'intérieur de l'igloo peut atteindre jusqu'à $5\,°\mathrm{C}$. Dans ces conditions, pourquoi faut-il lisser les parois intérieures de l'igloo ?
5. On tient désormais compte des transferts thermiques dans le sol. On suppose que la température du sol, de même conductivité thermique que la paroi de l'igloo, est constante et égale à T_b à la profondeur l. Calculer la température intérieure dans ces conditions. Discuter.

Données :

- Surface caractéristique de l'igloo : $ab = 3.0\,\mathrm{m}^2$
- Température du sol à $l = 50\,\mathrm{cm}$ de profondeur : $T_b = -10\,°\mathrm{C}$
- Puissance thermique dégagée par un adulte : $\mathcal{P} = 80\,\mathrm{W}$
- Conductivité thermique de la glace : $\lambda_g = 2.0\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$ et de la neige compactée : $\lambda_n = 0.25\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$
- Coefficient de Newton en convection naturelle : $h_N = 5\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$ et en convection forcée : $h_F = 30\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$

Exercice 2 - Comportement thermique de la Terre : Afin d'étudier le comportement thermique d'une planète tellurique en régime stationnaire, on la modélise par une sphère homogène de rayon R_T, de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ supposées uniformes. La distribution de température dans la planète est à symétrie sphérique, et l'interaction avec l'atmosphère impose une température de surface T_S uniforme également. Afin d'évaluer l'impact thermique de la radioactivité de la croûte superficielle d'épaisseur $R_T - R_C$, on suppose en outre que :

- pour $r \in [0, R_C[$, on néglige toute production d'énergie radioactive ;
- pour $r \in [R_C, R_T]$, des réactions nucléaires libèrent une puissance massique α.

1. Par une étude de symétries et d'invariances, déterminer la direction du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$, ainsi que les variables dont il dépend.
2. En procédant à un bilan énergétique à travers une calotte sphérique d'épaisseur $\mathrm{d}r$, établir la forme du profil de température $T(r)$ de la planète. On distinguera la croûte de la planète interne.
3. Définir les conditions aux limites permettant de calculer les constantes d'intégration du profil $T(r)$. Montrer alors que l'on obtient dans la croûte :

$$T(r) = -\frac{\rho\alpha}{6\lambda}r^2 - \frac{\rho\alpha R_C^3}{3\lambda r} + \frac{\rho\alpha}{6\lambda}\left(R_T^2 + \frac{2R_C^3}{R_T}\right) + T_S$$

4. Déterminer l'expression de la température au centre de la planète dans ce modèle. Discuter son application numérique.
5. Sur Terre, le gradient de température en surface est d'environ $30\,°\mathrm{C/km}$ sur les plaines continentales. Le modèle étudié ici permet-il d'en rendre compte ? Quel phénomène influence aussi la valeur du gradient de surface actuel sur Terre ?

Données : Épaisseur de la croûte : $R_T - R_C = 30\,\mathrm{km}$, rayon de la planète : $R_T = 6370\,\mathrm{km}$, masse volumique : $\rho = 2800\,\mathrm{kg/m^3}$, puissance massique radioactive : $\alpha = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{W/kg}$, conductivité thermique : $\lambda = 4\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$, température de surface : $T_S = 17\,°\mathrm{C}$.

Exercice 3 - Ailette de refroidissement : On considère l'atelier d'un souffleur de verre, disposant d'un four à la température T_f, dans lequel il introduit l'extrémité d'une perche en fonte, considérée pleine, de rayon $a = 1.0\,\text{cm}$ et de longueur $L = 2.0\,\text{m}$. Le reste de la perche baigne dans une atmosphère à la température T_a.

1. Établir l'équation différentielle qui modélise le transfert de chaleur dans la perche en régime stationnaire au contact de l'atmosphère.
2. Estimer à quelle distance on peut empoigner la perche sans risquer de se brûler. On considérera un four qui fonctionne à 1150 °C en régime établi, une perche de conductivité thermique $\lambda_{\text{fonte}} = 55\,\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, et une atmosphère à 30 °C qui présente au contact de la perche un coefficient de Newton $h = 10\,\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$.

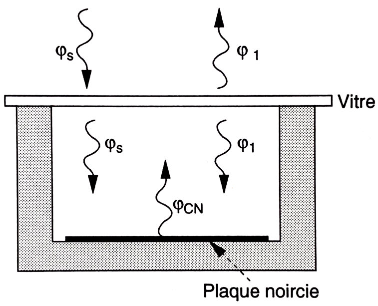
Exercice 4 - Effet de cave : L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est $T(0) = T_0 + a\cos\omega t$. On utilisera la notation complexe $\underline{T}(0) = T_0 + a\exp(j\omega t)$. Pour le sol, on note la masse volumique $\mu = 3.0\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, la capacité thermique $c = 515\,\text{J/kg/K}$ et la conductivité thermique $\lambda = 1.2\,\text{W/K/m}$. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\mu c\omega}}$.

1. On cherche une solution de la forme $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(j\omega t)$. Déterminer $\underline{f}(x)$ et en déduire $T(x,t)$.
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15 °C autour d'une température moyenne de 3 °C en hiver.

Exercice 5 - Équilibre thermique par rayonnement : Une sphère de rayon r très faible est assimilable à un corps noir. Elle est placée entre deux plaques opaques P_1 et P_2 à la température T_1. Elle baigne dans un fluide transparent. Elle est pleine et homogène, de chaleur massique C et de masse volumique μ. Elle est supposée à chaque instant à la température $T(t)$ uniforme. Le fluide ambiant étant à l'équilibre, les échanges conducto-convectifs sont supposés négligeables. La température initiale de la sphère est notée T_0.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T.
2. On suppose que T reste voisine de T_1 à chaque instant, en lui restant supérieure. Montrer alors que l'équation différentielle peut être remplacée par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
3. Déterminer $T(t)$ et tracer son graphe.

Exercice 6 - Effet de serre : On étudie l'effet de serre produit par l'interposition d'une vitre au-dessus d'une plaque qui reçoit le rayonnement solaire. La plaque est noircie et assimilée à un corps noir. Le verre est supposé totalement transparent au rayonnement solaire. La vitre est en revanche totalement absorbante pour le rayonnement infra-rouge émis par la plaque qui absorbe le rayonnement solaire. On désigne par φ_s le flux solaire surfacique supposé arriver normalement à la vitre et à la plaque.



1. On suppose l'équilibre radiatif de la plaque et de la vitre. Écrire les équations exprimant ces équilibres et en déduire la température T de la plaque. Faire l'application numérique de T avec $\varphi_\text{s} = 0.6\,\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$. En déduire la valeur de la température T_1 de la vitre.
2. Reprendre la question précédente dans le cas de deux vitres. En déduire la température du sol.
3. Reprendre la question dans le cas de n vitres et montrer que $\sigma T^4 = (n+1)\varphi_\text{s}$.

En réalité, en tenant compte de la réflexion et de l'absorption du verre, la température maximale est atteinte pour un nombre fini de plaques, généralement 4 ou 5.