Colle n° 15 : Optique 5 - Electromagnétisme 6

Exercice 1 - Interfranges en coin d'air : Un interféromètre de Michelson est réglé pour donner les franges du coin d'air, la différence de marche au centre des miroirs est nulle. La source est monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0.5893\,\mu\text{m}$.

On souhaite opérer sous incidence quasi-normale et observer les franges dans un écran E. On dispose pour cela de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de même distance focale $f' = 0.20\,\text{m}$.

1. Faire un schéma permettant d'observer les interférences sur l'écran.
2. L'écran E est placé à $D = 1\,\text{m}$ de la lentille L_2. L'interfrange mesurée sur l'écran est $i = 5\,\text{mm}$. Calculer l'angle α du coin d'air.
3. Comment peut-on s'assurer que la différence de marche est nulle au centre ?

Exercice 2 - Interférences en lumière blanche : On règle un interféromètre de Michelson de sorte que les deux miroirs M_1 et M_2 soient rigoureusement orthogonaux entre eux. L'image M_2' est alors rigoureusement parallèle à M_1.

Le miroir M_2 est monté sur un chariot permettant de le déplacer parallèlement à lui-même ; la position de ce chariot est repérée par son abscisse x comptée à partir d'une origine arbitraire. Cette abscisse augmente lorsque le miroir s'éloigne de la séparatrice.

À la sortie, on dispose une lentille convergente L et on enregistre l'intensité lumineuse grâce à un détecteur placé au foyer F' de cette lentille, détecteur dont l'entrée est limitée par un diaphragme de très petite dimension. L'indice de l'air est ici assimilé à celui du vide.

L'ensemble est éclairé par une source S supposée assez large pour que des rayons de différentes inclinaisons pénètrent dans l'interféromètre. Au besoin, on intercale une lentille convergente entre S et l'interféromètre. La source émet de manière uniforme dans un intervalle de fréquence (ν_1, ν_2). L'intensité émise dans une bande élémentaire de largeur $\mathrm{d}\nu$ appartenant à cet intervalle est proportionnelle à $\mathrm{d}\nu$. Chaque bande élémentaire est incohérente avec les autres.

1. Montrer que l'intensité totale en F' peut se mettre sous la forme $I(\delta) = I_0(1 + f(\delta))$ avec f une fonction que l'on précisera.

Cette source est en fait une source de lumière blanche ; les longueurs d'onde qui limitent le spectre sont 400 nm et 650 nm.

2. Tracer I/I_0 en fonction de δ, celui ci variant entre $-2\,\mu\text{m}$ et $+2\,\mu\text{m}$.
3. En déduire une méthode de réglage de l'interféromètre en épaisseur nulle.

   On fixe la différence de marche δ à une valeur supérieure à $2\,\mu\text{m}$.
4. Qu'observe-t-on en F' ?

On place derrière F' un spectroscope dont F' constitue la fente d'entrée.

5. Montrer que l'on obtient un spectre cannelé et évaluer le nombre N de bandes sombres visibles en fonction de δ.
6. Comment utiliser cette mesure pour s'approcher du contact optique ?

Exercice 3 - Solution ondulatoire des équations de Maxwell : On se place dans le vide de charges et de courants : $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$ et $\rho(M,t) = 0$ en tout point.

On considère le champ électrique suivant

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u_x} + E_0 \sin(\omega t + kz)\vec{u_y}$$

avec $k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\omega$.

Montrer que ce champ électrique est solution des équations de Maxwell dans le milieu considéré et donner le champ magnétique associé.

Exercice 4 - Solénoïde en régime variable : On étudie un solénoïde de longueur ℓ et de rayon a, constitué de N spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant $i(t)$. On suppose $\ell \gg a$, de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini. On suppose que le courant est suffisamment lentement variable pour se situer dans le cadre de l'ARQS magnétique.

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde. On supposera $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.

2. En établissant un parallèle formel entre les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS, justifier que le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{e}_\theta$.
3. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ induit en fonction de μ_0, r et $n = N/\ell$. On se limitera au cas $r < a$.
 Donnée :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \,.$$

Exercice 5 - Bilan d'énergie dans un condensateur en ARQS : On considère un condensateur constitué de plaques de rayon R, disposé en série avec une résistance. L'intérieur du condensateur est un isolant électrique vide de courants et de charges. Le circuit est alimenté par une tension $U(t) = U_0 \cos \omega t$. On se place dans la limite $R \ll c/\omega$.
1. Écrire les équations de Maxwell à l'intérieur du condensateur. Que valent les champ électrique et magnétique dans le condensateur ?
2. Calculer en fonction de $Q(t)$(charge d'une des plaques), $I(t)$ (courant circulant dans le circuit), c et R le rapport

$$x = \frac{B^2}{\varepsilon_0 \mu_0 E^2}\,,$$

 calculé en $r = R$. Conclure sur la valeur de x en calculant un ordre de grandeur du rapport Q/I.
3. Calculer le vecteur de Poynting associé, puis le flux d'énergie à travers la surface latérale du condensateur. À quoi correspond ce flux ?
4. Vérifier sur cet exemple le théorème de Poynting.

Exercice 6 - Câble coaxial en régime statique : On considère un câble coaxial de longueur ℓ, constitué de deux cylindres d'axe commun (Oz), parfaitement conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. On suppose $\ell \gg R_2$. Le cylindre intérieur est porté au potentiel V_1, porte une charge linéique λ et est parcourue par un courant I. Le cylindre extérieur est porté au potentiel $V_2 = V_1 - U$, porte une charge linéique $-\lambda$ et est parcouru par le courant $-I$.
1. Calculer les charges surfaciques σ_i portées par chacun des cylindres.
2. En déduire le champ $\vec{E}$ en tout point ainsi que la densité d'énergie électrique associée. En déduire la densité d'énergie linéique w_E.
3. En déduire la capacité linéique Γ du câble.
4. Calculer les courants surfaciques sur les deux conducteurs, et en déduire le champ magnétique.
5. Calculer la densité linéique w_B d'énergie magnétique. En déduire l'inductance linéique Λ.
6. Quelle est la valeur du produit $\Gamma\Lambda$? Quelle est sa dimension ?
7. Quelle impédance peut-on former à partir de Λ et Γ ? Trouver son expression en fonction de R_1 et R_2.
8. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ dans le cable, ainsi que le flux d'énergie Φ associé. Commenter.

Exercice 7 - Rayon classique de l'électron : L'observation d'un électron isolé dans un piège de Penning démontre que le rayon de cette particule est inférieur à 10×10^{-22} m.

On souhaite représenter classiquement un électron. Pour cela, on suppose qu'il est représenté par une sphère de rayon R_c uniformément chargée en volume, trouver une expression du rayon R_c en identifiant l'énergie électrostatique de cette distribution avec l'énergie de masse $m_e c^2$ de l'électron, qui correspond à l'énergie mécanique de la particule dans un référentiel où elle est au repos. Proposer un ordre de grandeur sachant que $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ et conclure. On rappelle $1\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.