Colle n° 15 : Optique 5 - Electromagnétisme 7

Exercice 1 - Frange d'ordre zéro et frange achromatique : On étudie un interféromètre de Michelson. Le miroir M_2 est fixe, le miroir M_1 peut être déplacé parallèlement à lui-même grâce à un chariot sur lequel il est monté. La position du chariot est repérée par son abscisse x. On compte positivement une augmentation du chemin optique du rayon arrivant sur le miroir M_1.

Initialement, l'interféromètre est réglé de façon à faire apparaître dans le champ quelques franges rectilignes. La frange brillante d'ordre zéro est au centre du champ pour $x = x_0$.

1. Préciser le réglage du Michelson. Où sont localisées les interférences ? Peut-on les projeter ? Comment peut-on s'assurer que la frange située au centre de l'écran est bien la frange brillante d'ordre zéro ?
2. On introduit devant M_2 et parallèlement à celui-ci une lame de mica à faces parallèles d'indice $n(\lambda_0)$ (on considère que la dispersion du verre) et d'épaisseur e et on opère ici en lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0. Quelle est, pour une position x du chariot et une longueur d'onde donnée la différence de marche δ au centre du champ ? On donnera le résultat en fonction de x, x_0, n et e.
3. Quelle est la valeur x_1 de x pour laquelle l'ordre d'interférence est nul au centre du champ ? On donnera le résultat en fonction de x_0, n et e.
4. On reprend le montage précédent en lumière blanche.
   (a) Quelles sont les abscisses correspondant, pour une longueur d'onde λ donnée, à une frange brillante au centre de l'écran ? On notera m l'ordre d'interférence correspondant.
   (b) On suppose que pour la lame en question, $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ est constant et connu. Montrer qu'il existe une valeur particulière x_2 de x correspondant à une frange brillante au centre de l'écran de même ordre m_0 pour toutes les longueurs d'ondes. Cette frange est appelée frange achromatique.

Exercice 2 - Épaisseur des anneaux en lame d'air : Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi-réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice (S_p), dont les facteurs de transmission et de réflexion valent 1/2, et 2 miroirs plants (M_1) et (M_2) perpendiculaires l'un à l'autre. La lame (S_p) est inclinée de 45° par rapport aux normales des miroirs. L'interféromètre est plongé dans l'air dont on prendra l'indice de réfraction égal à 1.

La source S est ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ. Par construction, l'écart entre les deux miroirs équivalents parallèles est de ℓ. On observe le phénomène d'interférences dans le plan focal P d'une lentille mince convergente de distance focale f'.

1. Montrer que les franges d'interférences obtenues dans P sont des anneaux. En supposant l'ordre d'interférence p_0 entier au centre ($i = 0$), calculer les rayons des anneaux brillants.
2. Calculer la demi-largeur des anneaux, définie en disant que si, dans la direction du maximum de lumière l'intensité est I_M, on trouve à demi-largeur l'intensité $I_M/2$.

Exercice 3 - Une solution réaliste des équations de Maxwell : On cherche une solution des équations de Maxwell dans le vide sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(z)e^{-t/\tau}\vec{e_x}$$
$$\vec{B}(M,t) = g(z)e^{-t/\tau}\vec{e_y}\,,$$

pour tout point M et tout instant t. Cette solution présente l'intérêt physique d'être un signal réaliste, puisque limité dans le temps.

1. Montrer que les expressions précédentes satisfont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. En utilisant les équations de Maxwell, trouver les équations satisfaites par les fonctions f et g.
3. On impose que f est paire, et que
$$\vec{E}(O,0) = E_0\vec{e_x}\,.$$
   En déduire les expressions des champs électrique et magnétique.
4. Calculer le vecteur de Poynting associé à cette solution.

Exercice 4 - Solénoïde en régime variable : On étudie un solénoïde de longueur ℓ et de rayon a, constitué de N spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant $i(t)$. On suppose $\ell \gg a$, de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde. On supposera $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}(r,t)$ induit en fonction de μ_0, r, $n = N/\ell$ et a. On se limitera au cas $r < a$.
3. Le solénoïde est pacouru par un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.
   (a) Exprimer la densité volumique d'énergie magnétique w_B.
   (b) Exprimer la densité volumique d'énergie électrique w_E.
   (c) Que peut-on dire du rapport des valeurs moyennes $\dfrac{\langle w_E \rangle}{\langle w_B \rangle}$ dans la limite $a \ll \lambda$?
4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ pour $r = a$ en fonction de μ_0, n, a, et $i(t)$.
5. Déterminer l'expression de l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_m$ emmagasinée à l'instant t dans le solénoïde en fonction de μ_0, n, a, ℓ et $i(t)$.
6. Déterminer l'expression du coefficient d'inductance propre $\mathcal{L}$ en fonction de N, μ_0, a et ℓ.

Exercice 5 - Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique : Un système électrique cylindrique, de hauteur h, est constitué de deux cylindres métalliques creux coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre intérieur reçoit initialement une charge $+\dfrac{Q}{2}$ et le cylindre extérieur une charge $-\dfrac{Q}{2}$. Le milieu qui les sépare a les propriétés diélectriques du vide, mais il est légèrement conducteur, de conductivité γ. On négligera les effets de bord, ainsi que la dépendance en fréquence de la conductivité.

1. Déterminer la valeur du champ électrique à l'instant initial. Faire de même à l'état final.
2. Que vaut le champ magnétique à tout instant ? Comment s'écrit la variation d'énergie électromagnétique entre l'instant initial et l'instant final ?
3. Que vaut le vecteur de Poynting ? Que peut-on dire de la variation d'énergie électromagnétique calculée précédemment ?
4. Déterminer le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ à tout instant. En déduire la quantité d'énergie dissipée par effet Joule. Commenter.