# Colle n° 17 : Electromagnétisme 9

**Exercice 1 - Condensateur en régime variable :** Cet exercice a pour but de mettre en oeuvre l'approximation des régimes quasi stationnaires dans sa version électrique (aussi appelée ARQS des condensateurs). On utilisera également le théorème d'Ampère sous sa forme généralisée tenant compte du courant de déplacement.

On s'intéresse à un condensateur plan composé de deux armatures circulaires de rayon $a$ et d'axe commun $(Oz)$. Elles sont distantes de $\ell \ll a$. Le condensateur est placé en série avec une résistance $R$ et un générateur de tension $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

1. Le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est supposé égal à $\vec{E_0} = E_0 e^{j\omega t}\vec{u}_z$. Calculer le champ magnétique $\vec{B_1}$ induit dans le condensateur par le champ électrique variable en utilisant le théorème d'Ampère.
2. Le champ magnétique $\vec{B_1}$ étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique $\vec{E_2}$. Déterminer ce deuxième champ $\vec{E_2}$ en supposant $\vec{E_2}(r=0) = \vec{0}$. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur sous la forme :
$$\vec{E} = \left[1 - \alpha\left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\right]\vec{E_0}\,,$$
où $\alpha$ est une constante à déterminer.
On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, on a
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{X} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\vec{e_z}\,.$$
3. À quelle condition se trouve-t-on dans l'approximation des régimes quasi stationnaires ? Le champ $(\vec{E}, \vec{B_1})$ est-il compatible avec l'équation de Maxwell-Ampère ? Comment pourrait-on résoudre la difficulté qui se pose ?
4. On cherche une solution exacte du problème sous la forme :
$$\vec{E}(r,t) = E(r)e^{j\omega t}\vec{e_z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)^n e^{j\omega t}\vec{u}_z\,.$$
   (a) Montrer que $\Delta E(r) = -\frac{\omega^2}{c^2}E(r)$ avec $\Delta$ l'opérateur Laplacien scalaire qui, en coordonnées cylindriques, s'exprime par
$$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial a}{\partial \theta} + \frac{\partial a}{\partial z}\,.$$
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre les $a_n$, et trouver alors l'expression du champ électrique dans le condensateur.

**Exercice 2 - Courants de Foucault :** On considère un conducteur cylindrique de rayon $R$, de longueur infinie, et de conductivité $\gamma$. Ce conducteur est placé dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe de révolution :
$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\,\vec{e}_z\,.$$

1. Calculer la distribution de courant $\vec{j}_1$ induite par ce champ magnétique. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\vec{e_z}\,.$$
2. En déduire la puissance dissipée $\mathcal{P}$ par unité de longueur du conducteur.
3. Un champ $\vec{B_1}$ est produit par le courant induit $\vec{j}_1$. Calculer ce champ induit dans le cadre de l'ARQS magnétique. Comment se compare-t-il au champ appliqué ?

**Exercice 3 - Onde plane associée à un faisceau laser :** Un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda$ émet une onde plane monochromatique polarisée rectilignement qui se propage dans le plan $(Oxy)$ et faisant un angle $\alpha = \pi/3$ avec l'axe $(Ox)$. Le faisceau est polarisé rectilignement suivant $(Oz)$.

1. Déterminer le vecteur d'onde, le champ électromagnétique, ainsi que le vecteur de Poynting associés à ce faisceau. On notera $E_0$ l'amplitude du champ électrique.
2. Calculer leur norme dans le cas d'un laser à Argon ($\lambda = 488\,\mathrm{nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de section $1\,\mathrm{mm}^2$ et de puissance moyenne $1\,\mathrm{W}$.

**Exercice 4 - Ondes longitudinales dans les plasmas :** Un plasma d'hydrogène est un gaz totalement ionisé constitué de protons de charge $e$ et de masse $m_\mathrm{p}$, et d'électrons de charge $-e$ et de masse $m_e \ll m_\mathrm{p}$. Au repos, les densités d'électrons et de protons sout égales à $n_0$. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes se propageant suivant $\overrightarrow{e_x}$, de la forme

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = E_1(x,t)\overrightarrow{e_x} = E_0\cos\left(\omega t - kx\right)\overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1}(x,t)\ .$$

Cette onde met en mouvement les charges. Les protons et les électrons acquièrent alors les vitesses $v_{1,\mathrm{p}}(x,t)\overrightarrow{e_x}$ et $v_{1,e}(x,t)\overrightarrow{e_x}$. Leurs densités sont alors modifiées selon $n_e = n_0 + n_{1,e}(x,t)$ et $n_\mathrm{p} = n_0 + n_{1,\mathrm{p}(x,t)}$. Toutes les quantités portant l'indice 1 sont de valeur moyenne temporelle nulle, et sont supposées infiniment petites, et de même ordre. On se limitera à un calcul d'ordre un dans la suite.

1. L'onde est qualifiée de plane et longitudinale électrique. Justifier, en montrant en particulier que le champ magnétique est nul.
2. Exprimer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction des densités d'électrons, de protons, et de leurs vitesses. En déduire
$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\varepsilon_0}\left(v_{1,\mathrm{p}} - v_{1,e}\right)\ .$$
3. La vitesse des électrons (resp. des protons) obéit à l'équation
$$\frac{\partial v_{1,e/\mathrm{p}}}{\partial t} = \mp\frac{e}{m_{e/\mathrm{p}}}E_1(x,t)\,.$$
En déduire les contributions relatives des électrons et des protons sur la densité de courant.
4. Déduire des questions précédentes la relation de dispersion des ondes. Commenter.
5. Calculer les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique de l'onde. Commenter.

**Exercice 5 - Diffusion de la lumière par des particules chargées :** On rappelle qu'un dipôle placé en $O$ dont le moment dipolaire, dirigé suivant $Oz$, est décrit par $\vec{p} = p(\omega)\cos(\omega t)\vec{e}_z$ et engendre, en un point $M$ situé à grande distance $r$ de $O$, un champ de rayonnement dont le vecteur de Poynting a pour expression

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p(\omega)^2\omega^4\cos^2(\omega(t-r/c))}{16\pi^2 r^2 c}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

avec $\vec{e}_r = O\vec{M}/r$ et $\theta$ l'angle entre $Oz$ et $O\vec{M}$.

Une onde monochromatique plane, progressive et polarisée rectilignement suivant $Oz$, arrive dans une région de l'espace où se trouvent des atomes modélisés de la façon suivante : le noyau de la charge $+q$ est supposé fixe en $P$, le nuage électronique est représenté par une charge ponctuelle $N$ de charge $-q$ et de masse $m$ rappelée vers le noyau par une force du type $-m\omega_0^2\vec{PN}$ où $\omega_0$ est une constante. Cette charge $N$ est de plus soumise à une force de frottement que l'on négligera mais dont l'action aboutit à l'amortissement des éventuels régimes transitoires. Dans les suites, les charges $N$ seront appelées « charges liées ». Ceci est le modèle « élastiquement lié ».

Le champ électromagnétique incident est caractérisé par $\overrightarrow{E} = E_0\exp[i(kx-\omega t)]\vec{e}_z$.

On supposera que le milieu est assez « dilué » (atomes assez peu nombreux par unité de volume) pour que l'on puisse considérer que ce champ électromagnétique se propage pratiquement dans le vide.

On supposera dans la suite que $\omega \ll \omega_0$.

1. Quelle est l'expression du champ $\overrightarrow{B}$ correspondant ?
2. On admet que sous l'action du champ électromagnétique incident, les charges liées se mettent en mouvement avec une vitesse faible devant $c$ et on négligera le ou les termes en $v/c$. Quel est alors, en régime permanent, le mouvement de ces charges liées ?
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par une charge liée ?
4. On admet que $E_0$ est indépendante de $\omega$, et donc de $\lambda$. Estimer numériquement le rapport entre la puissance rayonnée dans le rouge 650 nm et entre la puissance rayonnée dans le bleu 470 nm.