Colle n° 18 : Electromagnétisme 10

Exercice 1 - Ondes longitudinales dans les plasmas : Un plasma d'hydrogène est un gaz totalement ionisé constitué de protons de charge e et de masse m_p, et d'électrons de charge $-e$ et de masse $m_e \ll m_\mathrm{p}$. Au repos, les densités d'électrons et de protons sout égales à n_0. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes se propageant suivant $\overrightarrow{e_x}$, de la forme

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = E_1(x,t)\overrightarrow{e_x} = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1}(x,t)\ .$$

Cette onde met en mouvement les charges. Les protons et les électrons acquièrent alors les vitesses $v_{1,\mathrm{p}}(x,t)\overrightarrow{e_x}$ et $v_{1,e}(x,t)\overrightarrow{e_x}$. Leurs densités sont alors modifiées selon $n_e = n_0 + n_{1,e}(x,t)$ et $n_\mathrm{p} = n_0 + n_{1,\mathrm{p}(x,t)}$. Toutes les quantités portant l'indice 1 sont de valeur moyenne temporelle nulle, et sont supposées infiniment petites, et de même ordre. On se limitera à un calcul d'ordre un dans la suite.

1. L'onde est qualifiée de plane et longitudinale électrique. Justifier, en montrant en particulier que le champ magnétique est nul.
2. Exprimer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction des densités d'électrons, de protons, et de leurs vitesses. En déduire
$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\varepsilon_0}\left(v_{1,\mathrm{p}} - v_{1,e}\right)\ .$$
3. La vitesse des électrons (resp. des protons) obéit à l'équation
$$\frac{\partial v_{1,e/\mathrm{p}}}{\partial t} = \mp\frac{e}{m_{e/\mathrm{p}}}E_1(x,t)\,.$$
En déduire les contributions relatives des électrons et des protons sur la densité de courant.
4. Déduire des questions précédentes la relation de dispersion des ondes. Commenter.
5. Calculer les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique de l'onde. Commenter.

Exercice 2 - Diffusion de la lumière par des particules chargées : On rappelle qu'un dipôle placé en O dont le moment dipolaire, dirigé suivant Oz, est décrit par $\vec{p} = p(\omega)\cos(\omega t)\vec{e}_z$ et engendre, en un point M situé à grande distance r de O, un champ de rayonnement dont le vecteur de Poynting a pour expression

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p(\omega)^2\omega^4\cos^2(\omega(t - r/c))}{16\pi^2 r^2 c}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

avec $\vec{e}_r = \vec{OM}/r$ et θ l'angle entre Oz et $\vec{OM}$.

Une onde monochromatique plane, progressive et polarisée rectilignement suivant Oz, arrive dans une région de l'espace où se trouvent des atomes modélisés de la façon suivante : le noyau de la charge $+q$ est supposé fixe en P, le nuage électronique est représenté par une charge ponctuelle N de charge $-q$ et de masse m rappelée vers le noyau par une force du type $-m\omega_0^2\vec{PN}$ où ω_0 est une constante. Cette charge N est de plus soumise à une force de frottement que l'on négligera mais dont l'action aboutit à l'amortissement des éventuels régimes transitoires. Dans les suites, les charges N seront appelées « charges liées ». Ceci est le modèle « élastiquement lié ».

Le champ électromagnétique incident est caractérisé par $\overrightarrow{E} = E_0\exp[i(kx - \omega t)]\vec{e}_z$.

On supposera que le milieu est assez « dilué » (atomes assez peu nombreux par unité de volume) pour que l'on puisse considérer que ce champ électromagnétique se propage pratiquement dans le vide.

On supposera dans la suite que $\omega \ll \omega_0$.

1. Quelle est l'expression du champ $\overrightarrow{B}$ correspondant ?
2. On admet que sous l'action du champ électromagnétique incident, les charges liées se mettent en mouvement avec une vitesse faible devant c et on négligera le ou les termes en v/c. Quel est alors, en régime permanent, le mouvement de ces charges liées ?
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par une charge liée ?
4. On admet que E_0 est indépendante de ω, et donc de λ. Estimer numériquement le rapport entre la puissance rayonnée dans le rouge 650 nm et entre la puissance rayonnée dans le bleu 470 nm.

Exercice 3 - Pression de radiation : Une OPPH, à polarisation rectiligne, se propage dans le vide dans la direction (Ox), dans le sens des x croissants ($E_0 > 0$) :

$$\vec{E_i} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \vec{e_y}\,.$$

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur, et donne naissance à une onde réfléchie

$$\vec{E_r} = E_{0,r} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx)} \vec{e_y}\,.$$

On donne les relations de passage, avec la charge surfacique σ, $\vec{E}_{\text{metal}} - \vec{E}_{\text{vide}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_x}$.

Le champ magnétique vérifie, avec la densité de courant surfacique $\vec{j_s}$, $\vec{B}_{\text{metal}} - \vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{e_x}$.

1. Que vaut le champ électromagnétique dans le métal ?
2. Déterminer l'amplitude E_{0r} du champ électrique réfléchi, ainsi que la charge surfacique σ et le courant surfacique $\vec{j_s}$ à la surface du métal.
3. Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting dans le demi-espace $x < 0$.
4. Le champ électromagnétique exerce sur une surface $\mathrm{d}\Sigma$ du métal une force élémentaire

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{2}\left(\sigma\vec{E} + \vec{j_S} \wedge \vec{B}\right) d\Sigma\,.$$

   (a) Justifier qualitativement le facteur 1/2.
   (b) Déduire que le champ exerce sur le miroir une pression p dont on calculera la valeur moyenne en fonction de la densité d'énergie électromagnétique incidente, puis en fonction de la densité totale d'énergie électromagnétique.
   (c) Calculer la valeur moyenne de p pour un laser de puissance moyenne $5\,\mathrm{mW}$ et de section droite $0.1\,\mathrm{mm}^2$. Commenter.

Exercice 4 - Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère : On étudie la propagation des ondes radio transverses à l'interface atmosphère-ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région $z > 0$ et l'atmosphère dans la région $z < 0$. Le champ incident est $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - kz)]\vec{e}_x$. Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchie et l'autre partie est transmise. L'indice de réfraction de la ionosphère vaut $n = \dfrac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \dfrac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}$. La fréquence plasma vaut $f_\mathrm{p} = 6.9\,\mathrm{MHz}$. On admet que, dans ces conditions, le champ électromagnétique est continu en $z = 0$.

1. Déterminer les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ en amplitude pour le champ électrique.
2. Calculer les vecteurs de Poynting moyens incidents, réfléchis et transmis. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance (correspondant aux rapports des normes des vecteurs de Poynting moyens). Quelle est la relation entre R et T ?
3. Quelle est la valeur de R lorsque $\omega < \omega_\mathrm{p}$? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?