

Colle n° 18 : Electromagnétisme 9

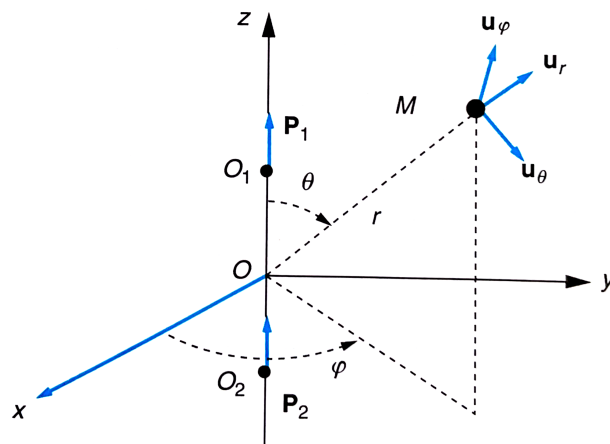
**Exercice 1 - Ondes dans un électrolyte :** Dans cet exercice, on cherche à modéliser l'impact d'une faible conductivité sur la propagation des ondes électromagnétiques. Cela impose notamment de rechercher une relation de dispersion dans un milieu matériel.

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans l'eau de mer, modélisée comme un électrolyte (solution contenant des ions responsables du transport du courant) de densité de charge  $\rho = 0$  (le milieu est donc localement neutre), de permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r = 80$  et par sa conductivité  $\sigma \simeq 6 \text{ S/m}$  (on notera la faible conductivité, liée à la nature des porteurs de charge).

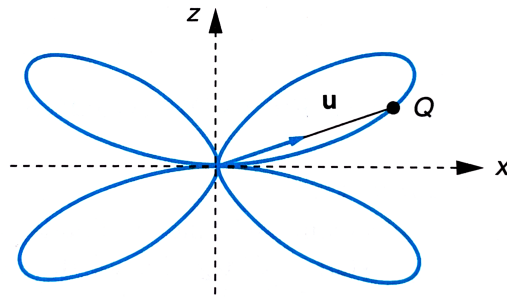
1. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu étudié. On admet que la nature du milieu consiste à remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_r \epsilon_0$ .
2. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique.
3. Déterminer la relation de dispersion du milieu, et la commenter.
4. Quel est le domaine de fréquence à privilégier pour la communication sous-marine ?

**Exercice 2 - Modèle élémentaire d'antenne :** Deux dipôles oscillants de moments dipolaires  $\mathbf{p}_1 = p_0 \cos(\omega t - \omega a/c) \mathbf{u}_z$  et  $\mathbf{p}_2 = p_0 \cos(\omega t + \omega a/c) \mathbf{u}_z$  sont placés aux points  $O_1$  et  $O_2$  de l'axe  $Oz$  de cotes respectives  $z_1 = a$  et  $z_2 = -a$ . En un point  $M$  éloigné, on peut considérer que les champs ont été émis par  $O$  pour exprimer tous les facteurs géométriques  $r_1/c = O_1M/c$  et  $r_2/c = O_2M/c$ . Ces deux dipôles rayonnent alors un champ électrique de la forme :

$$\mathbf{E} = (\ddot{p}_1(t - r_1/c) + \ddot{p}_2(t - r_2/c)) \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \mathbf{u}_\theta .$$



1. Exprimer  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $r$ ,  $a$  et  $\theta$  en limitant les calculs à l'ordre 1 en l'infiniment petit  $a/r$ .
2. En admettant qu'à grande distance, l'onde est localement plane de direction de propagation  $\mathbf{u}_r$ , en déduire l'expression du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .
3. En déduire l'expression de la norme du vecteur de Poynting.
4. Dans le cas d'une antenne demi-onde, c'est-à-dire telle que  $2\omega a/c = \pi$ , on a tracé ci-dessous l'indicatrice de rayonnement en portant dans chaque direction  $\mathbf{u}_r$  du plan une longueur proportionnelle à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting à  $r$  fixé. Commenter l'allure de cette indicatrice. Dans quelle direction la puissance moyenne rayonnée est nulle ? Interpréter sans calculs.



**Exercice 3 - Couche anti-reflet :** Un milieu transparent, d'indice  $N$ , est limité par une surface plane. Cette surface est recouverte par une couche mince transparente d'indice  $n$  et d'épaisseur uniforme  $e$ . Une onde plan progressive monochromatique incidente  $\vec{E}_1$  provient de l'air et tombe sur la surface  $x = 0$  sous incidence normale. Elle donne naissance à une onde réfléchie  $\vec{E}'_1$  et une onde transmise  $\vec{E}_2$ . L'onde  $\vec{E}_2$  tombe sur la surface  $x = e$ . Elle donne naissance à une onde réfléchie  $\vec{E}'_2$  et une onde transmise  $\vec{E}_3$ .

On rappelle que l'indice optique est donné par  $n = \frac{ck}{\omega}$  avec  $k$  le nombre d'onde. Il n'y a ni charge, ni courants à l'interface.

1. Faire un schéma en représentant les différents champs.
2. Déterminer  $\underline{r} = \frac{E'_1}{E_1}$  le coefficient de réflexion en amplitude dans le cas où  $e = \lambda/(4n)$ .
3. Comment doit-on choisir  $n$  pour éliminer les pertes de lumière par réflexion ? Application numérique pour  $N = 1.8$ .
4. Quelle est l'épaisseur correspondante pour  $\lambda = 560 \text{ nm}$  ?

**Exercice 4 - Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère :** On étudie la propagation des ondes radio transverses à l'interface atmosphère-ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région  $z > 0$  et l'atmosphère dans la région  $z < 0$ . Le champ incident est  $\vec{E}_i = E_0 \exp[j(\omega t - kz)]\vec{e}_x$ . Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchie et l'autre partie est transmise. L'indice

de réfraction de la ionosphère vaut  $n = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ . La fréquence plasma vaut  $f_p = 6.9 \text{ MHz}$ . On admet que, dans ces conditions, le champ électromagnétique est continu en  $z = 0$ .

1. Déterminer les coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et de transmission  $\underline{t}$  en amplitude pour le champ électrique.
2. Calculer les vecteurs de Poynting moyens incidents, réfléchis et transmis. En déduire les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en puissance (correspondant aux rapports des normes des vecteurs de Poynting moyens). Quelle est la relation entre  $R$  et  $T$  ?
3. Quelle est la valeur de  $R$  lorsque  $\omega < \omega_p$  ? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?