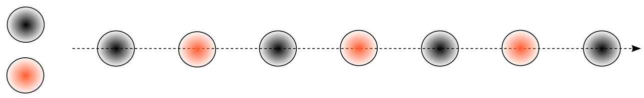
Colle n° 2 : Électromagnétisme 1

Exercice 1 - Potentiel créé par une chaîne infinie : On considère une chaîne infinie d'ions, espacés régulièrement d'une distance a. Les sites pairs sont occupés par des ions de charge q et les sites impairs par des ions de charge $-q$. On se propose de calculer l'énergie d'interaction de la chaîne.

On donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n} = \ln(2)$.



1. Peut-on prévoir la forme du résultat ?
2. On s'intéresse d'abord à une charge q placée en $x = 0$. Quel est le potentiel créé par cette charge dans tout l'espace ?
3. On place une charge $-q$ en $x = a$. Quelle est son énergie potentielle dans le champ créé par la première charge ? Même question pour une troisième charge q placée en $x = 2a$.
4. En déduire l'énergie potentielle W d'un ion dans la chaîne infinie.

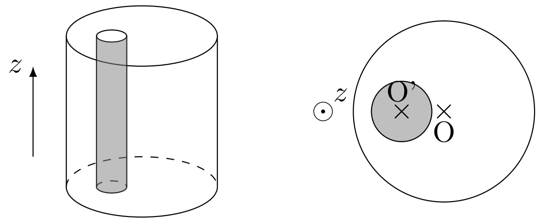
Exercice 2 - Système $-q$, kq ; équipotentielle $V = 0$: Une charge ponctuelle $q_1 > 0$ est placée dans le vide sur un axe $x'Ox$ au point O et une charge ponctuelle $q_2 < 0$ est placée sur ce même axe au point P d'abscisse $D > 0$. On pose $q_2 = -q$ et $q_1 = +kq$ avec $k > 1$, et $q > 0$.

1. Donner l'expression de $V(M)$, potentiel en un point quelconque de l'espace situé à r_1 de O et r_2 de P.
2. Préciser la relation existante entre r_1 et r_2 sur la surface équipotentielle $V = 0$.
3. Cette relation définit une sphère de rayon R centrée au point C de l'axe Ox d'abscisse $D + d$ avec $d \geqslant 0$. En utilisant les coordonnées cartésiennes, déterminer R et d en fonction de D et k.

Exercice 3 - Champ dans une cavité cylindrique :

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ, présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différente de O_1) vide de charges.

Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité et donner sa valeur.



Exercice 4 - Énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée : Une sphère de rayon R porte la charge Q uniformément répartie en volume. On définit l'énergie de constitution (ou énergie coulombienne) de cette sphère comme le travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

1. Calculer le potentiel d'une boule uniformément chargé de rayon r.
2. La sphère a un rayon $r < R$. Calculer le travail qu'il faut fournir pour augmenter le rayon de cette sphère de $\mathrm{d}r$, en amenant les charges de l'infini.
3. En déduire l'expression de l'énergie de constitution de la sphère en fonction de Q et R.
4. Par analogie, en déduire l'énergie gravitationnelle d'une sphère de rayon R et de masse M.

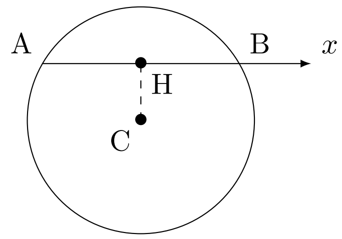
Exercice 5 - Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss : On considère une région vide de charge dans laquelle est établi un champ de la forme : $\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_z\vec{e}_z$.

1. Quelle symétrie présente ce champ électrique ?
2. Quelle équation est vérifiée par ce champ électrique ?
3. Montrer que si l'on connaît le champ électrique sur l'axe $\vec{E}(r = 0, z)$, alors on peut calculer le champ électrique radial en un point proche de l'axe, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques. On rappelle que la divergence en coordonnées cylindriques s'écrit : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$.

Exercice 6 - Foudre en boule : On cherche à rendre compte de l'évolution d'un boule constitué d'un nombre N de particules portant une même charge q plongée dans l'air. Ces charges engendrent un champ électrique variable $\overrightarrow{E} = E(r,t)\vec{e}_r$. Sous l'effet de ce champ, les charges qui se déplacent dans l'air acquièrent un vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{E}$ où la constante μ appelée mobilité des charges est du signe de q. On note $\rho(t)$ la densité volumique de charges ; on suppose qu'elle reste uniforme et on note ρ_0 sa valeur initiale. On note $\overrightarrow{j} = j(r,t)\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant. On note $R(t)$ le rayon de la boule et R_0 sa valeur initiale.

1. Donner alors l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur de la boule.
2. Exprimer $\overrightarrow{j}$ en fonction de μ, ϵ_0, $\rho(t)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
3. Montrer que div $\overrightarrow{OM} = 3$ puis en déduire de l'équation de conservation de la charge que $\rho(t)$ est solution équation différentielle du premier ordre à variables séparables et la résoudre.
4. En déduire l'expression de $R(t)$.
5. Retrouver le résultat en envisageant le mouvement d'une charge située à chaque instant au bord de la boule chargée.

Exercice 7 - Tunnel terrestre : On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de A sans vitesse initiale. On prendra $R_\mathrm{T} = 6.4 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $d = \mathrm{CH} = 5 \times 10^6\,\mathrm{m}$ et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.



1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel terrestre à la distance r du centre de la terre.
2. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ de M.
3. Quelle est la vitesse maximale atteinte par M au cours du mouvement.
4. Déterminer le temps mis pour aller de A vers B.