Colle n° 4 : Électromagnétisme

Exercice 1 - Potentiel créé par une chaîne infinie : On considère une chaîne infinie d'ions, espacés régulièrement d'une distance a. Les sites pairs sont occupés par des ions de charge q et les sites impairs par des ions de charge $-q$. On se propose de calculer l'énergie d'interaction de la chaîne.

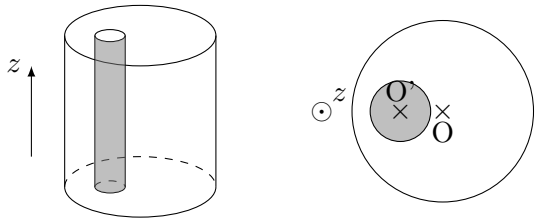
On donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

1. Peut-on prévoir la forme du résultat ?
2. On s'intéresse d'abord à une charge q placée en $x = 0$. Quel est le potentiel créé par cette charge dans tout l'espace ?
3. On place une charge $-q$ en $x = a$. Quelle est son énergie potentielle dans le champ créé par la première charge ? Même question pour une troisième charge q placée en $x = 2a$.
4. En déduire l'énergie potentielle W d'un ion dans la chaîne infinie.

Exercice 2 - Champ dans une cavité cylindrique :

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ, présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différente de O_1) vide de charges.

Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité et donner sa valeur.



Exercice 3 - Énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée : Une sphère de rayon R porte la charge Q uniformément répartie en volume. On définit l'énergie de constitution (ou énergie coulombienne) de cette sphère comme le travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

1. Calculer le potentiel d'une boule uniformément chargé de rayon r.
2. La sphère a un rayon $r < R$. Calculer le travail qu'il faut fournir pour augmenter le rayon de cette sphère de dr, en amenant les charges de l'infini.
3. En déduire l'expression de l'énergie de constitution de la sphère en fonction de Q et R.
4. Par analogie, en déduire l'énergie gravitationnelle d'une sphère de rayon R et de masse M.

Exercice 4 - Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss : On considère une région vide de charge dans laquelle est établi un champ de la forme : $\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_z\vec{e}_z$.

1. Quelle symétrie présente ce champ électrique ?
2. Quelle équation est vérifiée par ce champ électrique ?
3. Montrer que si l'on connaît le champ électrique sur l'axe $\vec{E}(r = 0, z)$, alors on peut calculer le champ électrique radial en un point proche de l'axe, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques. On rappelle que la divergence en coordonnées cylindriques s'écrit : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

Exercice 5 - Foudre en boule : On cherche à rendre compte de l'évolution d'un boule constitué d'un nombre N de particules portant une même charge q plongée dans l'air. Ces charges engendrent un champ électrique variable $\overrightarrow{E} = E(r,t)\vec{e}_r$. Sous l'effet de ce champ, les charges qui se déplacent dans l'air acquièrent un vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{E}$ où la constante μ appelée mobilité des charges est du signe de q. On note $\rho(t)$ la densité volumique de charges ; on suppose qu'elle reste uniforme et on note ρ_0 sa valeur initiale. On note $\overrightarrow{j} = j(r,t)\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant. On note $R(t)$ le rayon de la boule et R_0 sa valeur initiale.

1. Donner alors l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur de la boule.
2. Exprimer $\overrightarrow{j}$ en fonction de μ, ϵ_0, $\rho(t)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
3. Montrer que div $\overrightarrow{OM} = 3$ puis en déduire de l'équation de conservation de la charge que $\rho(t)$ est solution équation différentielle du premier ordre à variables séparables et la résoudre.

4. En déduire l'expression de $R(t)$.
5. Retrouver le résultat en envisageant le mouvement d'une charge située à chaque instant au bord de la boule chargée.