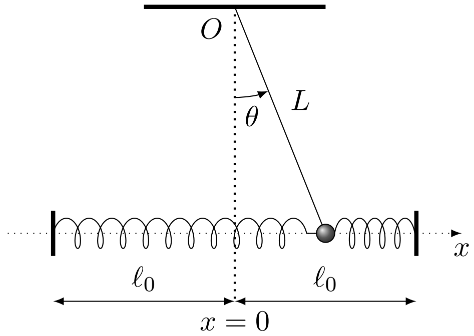
Colle n° 4 : Mécanique 1

Exercice 1 - Pendule simple couplé à des ressorts : On considère le dispositif suivant. Les deux ressorts sont identiques (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et on écarte légèrement la masse M supposée ponctuelle de sa position d'équilibre.

En supposant $|\theta| \ll 1$ rad, on peut considérer que le mouvement est pratiquement horizontal.

1. Montrer que dans ce cas, on a $x \approx L\theta$ et $v \approx L\dot{\theta}$.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer une équation différentielle sur θ.
3. En déduire la période des oscillations.



Exercice 2 - Saut à l'élastique : Un sauteur à l'élastique est modélisé par un point matériel M de masse $m = 70$ kg. Il tombe (sans vitesse initiale) depuis un pont avec un élastique accroché à ses pieds. La longueur de l'élastique non tendu est $l_0 = 20\,\mathrm{m}$. L'élastique est modélisé par un ressort de raideur $k = 120\,\mathrm{N/m}$.

La tension maximale permise par l'élastique (avant rupture) est $T_{\max} = 3\,\mathrm{kN}$. La hauteur du pont $H = 45\,\mathrm{m}$. L'étude du saut comporte deux phases :

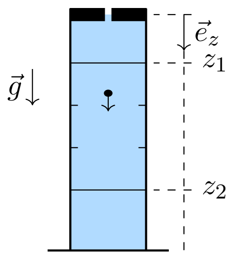
- la première au cours de laquelle le fil n'est pas tendu ;
- la seconde au cours de laquelle le fil se tend jusqu'à sa longueur maximale.

Les frottements sont négligés et on prendra $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On prend l'axe z vers le bas.

1. Justifier que l'énergie mécanique se conserve durant toute la chute.
2. Déterminer l'équation donnant la longueur maximale du fil.
3. Le fil va-t-il rompre ? Le pont est-il assez haut ?

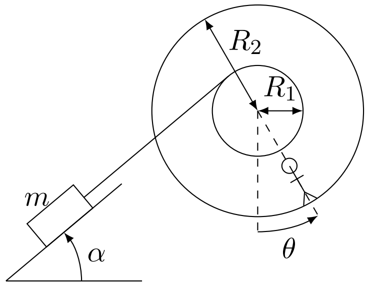
Exercice 3 - Viscosimètre à billes :

Une bille en acier (de masse volumique $\rho_a = 7800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) de rayon $R = 5\,\mathrm{mm}$ tombe dans de la glycérine (de masse volumique $\rho_g = 1260\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). La bille est soumise à la poussée d'Archimède exercée par la glycérine. De plus, la bille subit, lorsqu'elle possède la vitesse $\vec{v}$, une force de frottement fluide (ou force de traînée) $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où η est une constante appelée viscosité dynamique de la glycérine. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.



1. Établir l'équation différentielle que vérifie la composante verticale de la vitesse de la bille $v_z(t)$.
2. Montrer que la vitesse de la bille tend vers une valeur limite dont on donnera l'expression en fonction des données du problème. Quelle la constante τ du mouvement ?
3. L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1.6\,\mathrm{s}$ mise pour passer de l'altitude $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$ à $z_2 = 50\,\mathrm{cm}$. On suppose que le régime permanent est atteint, en déduire l'expression puis la valeur numérique de la viscosité η.
4. Donner la valeur numérique de τ et donner un ordre de grandeur de la distance parcourue pendant ce temps. Pourquoi ne pas avoir réalisé la mesure précédente depuis la surface ?
5. On donne $\eta_{eau} = 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$. À votre avis, ce dispositif est-il adapté à la mesure de la viscosité de l'eau ?

Exercice 4 - Cage d'écureuil : On considère le système de levage représenté ci-dessous. Pour tracter la masse m à une vitesse v, des hommes se déplacent dans la cage d'écureuil, à un angle θ par rapport à la verticale, pour exercer un bras de levier avec leur propre poids.

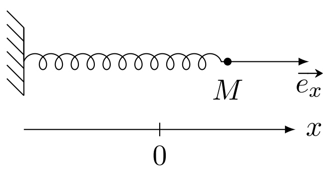


1. Dans un premier temps, on considère que les hommes se déplacent d'un angle $\theta_{\max}$ correspondant à la limite du glissement.
   (a) Déterminer l'angle $\theta_{\max}$ correspondant à la limite du glissement.
   (b) Établir l'expression de la force $\overrightarrow{T_F}$ exercée par la corde sur la masse m.
   (c) Quel est alors le nombre d'hommes k minimal permettant de faire monter la pierre ?
2. On tient maintenant compte de la puissance musculaire $\mathcal{P}$ d'un homme et on considère que la position angulaire θ des hommes dans la cage vérifie $\theta < \theta_{\max}$. Que devient le nombre k minimal de personnes nécessaires pour tirer la masse à la vitesse constante v en fonction de $\mathcal{P}$?

   Données :

   - $R_1 = 40\,\mathrm{cm}$; $R_1 = 2\,\mathrm{m}$; $m = 500\,\mathrm{kg}$; $\alpha = 40°$,
   - Coefficient de frottement pierre-sol et homme-roue $\mu = 0,9$,
   - Masse d'un homme : $m_H = 70\,\mathrm{kg}$,
   - Masse de la roue : $m_R = 500\,\mathrm{kg}$,
   - la masse de la roue est intégralement répartie sur le cylindre de rayon R_2 et son moment d'inertie vaut alors $J = m_R R_2^2$.

Exercice 5 - Oscillateur avec frottements solides : On considère un oscillateur masse-ressort horizontal avec un frottement solide de coefficient $f_s = f_d = f$. Le ressort est de raideur k et l'origine $x = 0$ correspond à sa longueur à vide. La masse M est abandonnée sans vitesse initiale à l'abscisse x_0 vérifiant $kx_0 > fmg$.



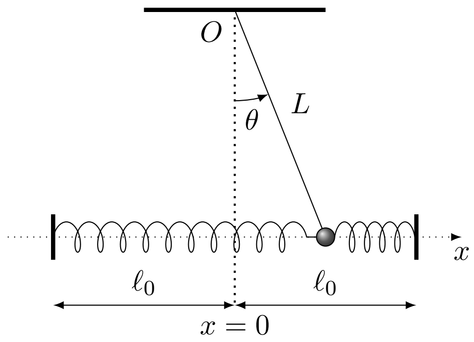
1. Déterminer l'équation du mouvement jusqu'au premier point de vitesse nulle puis la résoudre.
2. Calculer successivement les élongations maximales du ressort.
3. Indiquer la condition pour que la masse s'arrête définitivement après le n$^{\text{ième}}$ arrêt.
4. Tracer x en fonction de t.

Colle n° 4 : Mécanique 1

Exercice 6 - Pendule simple couplé à des ressorts : On considère le dispositif suivant. Les deux ressorts sont identiques (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et on écarte légèrement la masse M supposée ponctuelle de sa position d'équilibre.

En supposant $|\theta| \ll 1$ rad, on peut considérer que le mouvement est pratiquement horizontal.

1. Montrer que dans ce cas, on a $x \approx L\theta$ et $v \approx L\dot{\theta}$.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer une équation différentielle sur θ.
3. En déduire la période des oscillations.



Exercice 7 - Saut à l'élastique : Un sauteur à l'élastique est modélisé par un point matériel M de masse $m = 70$ kg. Il tombe (sans vitesse initiale) depuis un pont avec un élastique accroché à ses pieds. La longueur de l'élastique non tendu est $l_0 = 20\,\text{m}$. L'élastique est modélisé par un ressort de raideur $k = 120\,\text{N/m}$.

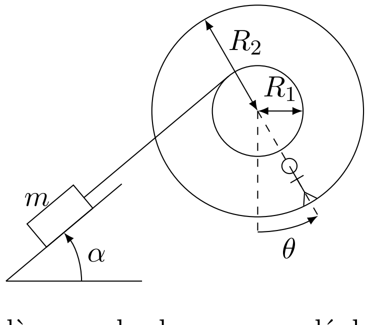
La tension maximale permise par l'élastique (avant rupture) est $T_{\text{max}} = 3\,\text{kN}$. La hauteur du pont $H = 45\,\text{m}$. L'étude du saut comporte deux phases :

- la première au cours de laquelle le fil n'est pas tendu ;
- la seconde au cours de laquelle le fil se tend jusqu'à sa longueur maximale.

Les frottements sont négligés et on prendra $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On prend l'axe z vers le bas.

1. Justifier que l'énergie mécanique se conserve durant toute la chute.
2. Déterminer l'équation donnant la longueur maximale du fil.
3. Le fil va-t-il rompre ? Le pont est-il assez haut ?

Exercice 8 - Cage d'écureuil : On considère le système de levage représenté ci-dessous. Pour tracter la masse m à une vitesse v, des hommes se déplacent dans la cage d'écureuil, à un angle θ par rapport à la verticale, pour exercer un bras de levier avec leur propre poids.

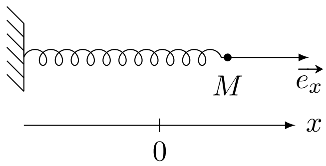


1. Dans un premier temps, on considère que les hommes se déplacent d'un angle θ_{max} correspondant à la limite du glissement.
   (a) Déterminer l'angle θ_{max} correspondant à la limite du glissement.
   (b) Établir l'expression de la force $\overrightarrow{T_F}$ exercée par la corde sur la masse m.
   (c) Quel est alors le nombre d'hommes k minimal permettant de faire monter la pierre ?
2. On tient maintenant compte de la puissance musculaire $\mathcal{P}$ d'un homme et on considère que la position angulaire θ des hommes dans la cage vérifie $\theta < \theta_{\text{max}}$. Que devient le nombre k minimal de personnes nécessaires pour tirer la masse à la vitesse constante v en fonction de $\mathcal{P}$?

Données :

- $R_1 = 40\,\mathrm{cm}$; $R_1 = 2\,\mathrm{m}$; $m = 500\,\mathrm{kg}$; $\alpha = 40°$,
- Coefficient de frottement pierre-sol et homme-roue $\mu = 0,9$,
- Masse d'un homme : $m_H = 70\,\mathrm{kg}$,
- Masse de la roue : $m_R = 500\,\mathrm{kg}$,
- la masse de la roue est intégralement répartie sur le cylindre de rayon R_2 et son moment d'inertie vaut alors $J = m_R R_2^2$.

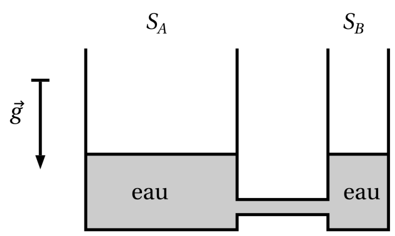
Exercice 9 - Oscillateur avec frottements solides : On considère un oscillateur masse-ressort horizontal avec un frottement solide de coefficient $f_s = f_d = f$. Le ressort est de raideur k et l'origine $x = 0$ correspond à sa longueur à vide. La masse M est abandonnée sans vitesse initiale à l'abscisse x_0 vérifiant $kx_0 > fmg$.



1. Déterminer l'équation du mouvement jusqu'au premier point de vitesse nulle puis la résoudre.
2. Calculer successivement les élongations maximales du ressort.
3. Indiquer la condition pour que la masse s'arrête définitivement après le n$^{\text{ième}}$ arrêt.
4. Tracer x en fonction de t.

Exercice 10 - Prise en compte de la compressibilité de l'eau : L'eau liquide est en fait un peu compressible et sa masse volumique peut s'approximer en fonction de la pression (à température constante) sous la forme $\rho(P) = \rho_0(1 + \alpha(P - P_0))$ où ρ_0 et P_0 sont des constantes.
1. Quel est le signe de α ?
2. Donner l'expression de la pression en fonction de la profondeur sachant qu'à la surface $z = 0$, $P = P_0$.
3. Donner l'équivalent de cette solution pour de faibles profondeurs.

Exercice 11 - Vases communicants :



Deux récipients A et B de sections constantes respectives $S_A = 40\,\mathrm{cm}^2$ et $S_B = 10\,\mathrm{cm}^2$ communiquent à leur base par un tube fin.
De l'eau a été versée à l'intérieur du récipient de sorte que le niveau d'eau soit bien au dessus du tube de communication.
Données :

- pour l'eau : $\rho_e = 1.0\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$
- pour l'huile : $\rho_h = 0.9\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

1. Justifier que les deux surfaces libres sont donc à la même altitude.
2. On verse un volume $V = 0.2\,\mathrm{L}$ d'huile dans le récipient coté A. Déterminer la dénivellation entre les deux surfaces libres.
3. Quelle serait cette dénivellation si on avait versé l'huile dans le récipient B ?