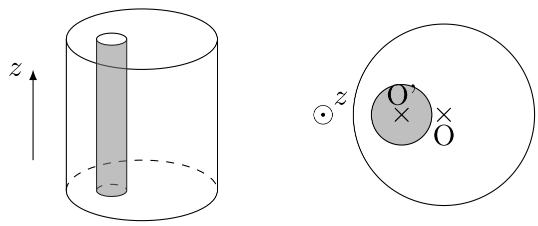
Colle n° 5 : Électromagnétisme

Exercice 1 - Champ dans une cavité cylindrique :

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ, présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différente de O_1) vide de charges.

Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité et donner sa valeur.



Exercice 2 - Énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée : Une sphère de rayon R porte la charge Q uniformément répartie en volume. On définit l'énergie de constitution (ou énergie coulombienne) de cette sphère comme le travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

1. Calculer le potentiel d'une boule uniformément chargé de rayon r.
2. La sphère a un rayon $r < R$. Calculer le travail qu'il faut fournir pour augmenter le rayon de cette sphère de dr, en amenant les charges de l'infini.
3. En déduire l'expression de l'énergie de constitution de la sphère en fonction de Q et R.
4. Par analogie, en déduire l'énergie gravitationnelle d'une sphère de rayon R et de masse M.

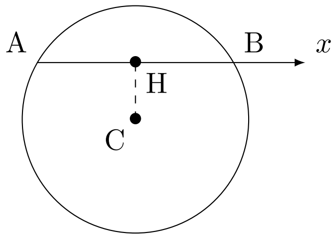
Exercice 3 - Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss : On considère une région vide de charge dans laquelle est établi un champ de la forme : $\overrightarrow{E} = E_r\vec{e}_r + E_z\vec{e}_z$.

1. Quelle symétrie présente ce champ électrique ?
2. Quelle équation est vérifiée par ce champ électrique ?
3. Montrer que si l'on connaît le champ électrique sur l'axe $\overrightarrow{E}(r = 0, z)$, alors on peut calculer le champ électrique radial en un point proche de l'axe, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques. On rappelle que la divergence en coordonnées cylindriques s'écrit : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

Exercice 4 - Foudre en boule : On cherche à rendre compte de l'évolution d'un boule constitué d'un nombre N de particules portant une même charge q plongée dans l'air. Ces charges engendrent un champ électrique variable $\overrightarrow{E} = E(r,t)\vec{e}_r$. Sous l'effet de ce champ, les charges qui se déplacent dans l'air acquièrent un vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{E}$ où la constante μ appelée mobilité des charges est du signe de q. On note $\rho(t)$ la densité volumique de charges ; on suppose qu'elle reste uniforme et on note ρ_0 sa valeur initiale. On note $\overrightarrow{j} = j(r,t)\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant. On note $R(t)$ le rayon de la boule et R_0 sa valeur initiale.

1. Donner alors l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur de la boule.
2. Exprimer $\overrightarrow{j}$ en fonction de μ, ϵ_0, $\rho(t)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
3. Montrer que $\operatorname{div}\overrightarrow{OM} = 3$ puis en déduire de l'équation de conservation de la charge que $\rho(t)$ est solution équation différentielle du premier ordre à variables séparables et la résoudre.
4. En déduire l'expression de $R(t)$.
5. Retrouver le résultat en envisageant le mouvement d'une charge située à chaque instant au bord de la boule chargée.

Exercice 5 - Tunnel terrestre : On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de A sans vitesse initiale. On prendra $R_\mathrm{T} = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}$, $d = \mathrm{CH} = 5\times10^6\,\mathrm{m}$ et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.



1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel terrestre à la distance r du centre de la terre.
2. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ de M.
3. Quelle est la vitesse maximale atteinte par M au cours du mouvement.
4. Déterminer le temps mis pour aller de A vers B.

Exercice 6 - Discontinuité de Bullard : On considère un modèle de Terre à symétrie sphérique de rayon R : on observe que le champ de gravitation $g(r)$ varie à l'intérieur de la manière suivante :

- $\vec{g}(r) = -\alpha r \vec{e_r}$ pour $0 < r < R/2$
- $\vec{g}(r) = -g_0 \vec{e_r}$ pour $R/2 < r < R$.

On note M la masse totale de la Terre, et G la constante de gravitation universelle. On pose également $\mu_<(r)$ la masse volumique dans la zone $r < R/2$ et $\mu_>(r)$ celle dans la zone $r > R/2$.
1. Utiliser le théorème de Gauss dans la zone $r < R/2$ pour déterminer $\mu_<$. On appliquera ce théorème à deux sphères de rayons r et $r + \mathrm{d}r$.
2. Faire de même pour trouver $\mu_>$.
3. Déterminer α.

Exercice 7 - Diode à vide : Une diode à vide est formée de deux électrodes planes parallèles, la cathode C et l'anode A, de surface S et séparées d'une distance d. La cathode est maintenue à un potentiel nul ($V_\mathrm{C} = 0$) mais elle est chauffée. Par effet thermoélectronique, elle libère des électrons ayant une vitesse faible (prise nulle pour la suite). Ces électrons sont dirigés vers l'anode qui est portée au potentiel $V_\mathrm{A} > 0$. On admet que les lignes de courant ainsi créées sont perpendiculaires aux deux plaques. La zone située entre les électrodes contient donc des électrons qui ont été émis sans vitesse initiale par la cathode.

On néglige tout effet de bord et on ne s'intéresse qu'à l'espace inter-électrodes dans lequel on considère que la charge volumique ρ, le potentiel V, la vitesse v et l'intensité électrique I ne sont des fonctions que de x.
1. Retrouver l'équation reliant le potentiel V et la densité de charge ρ.
2. Par des arguments numériques, montrer que le poids des électrons peut être négligé devant la force électrostatique.
3. Calculer la vitesse des électrons en x en fonction du potentiel $V(x)$.
4. Déterminer l'expression de l'intensité $I(x)$ traversant une surface d'aire S située à une distance $x < d$ de la cathode et parallèle à celle-ci. Exprimer le résultat en fonction de $\rho(x)$, S et $v(x)$.
5. Montrer que l'intensité ne dépend pas de x.
6. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par V. On fera apparaître le paramètre $a = \dfrac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$.
7. Intégrer cette équation pour déterminer $V(x)$. On supposera que le champ et le potentiel sont nuls en $x = 0$.
8. En déduire la relation entre l'intensité I et le potentiel V_A de l'anode (loi de Child-Langmuir).