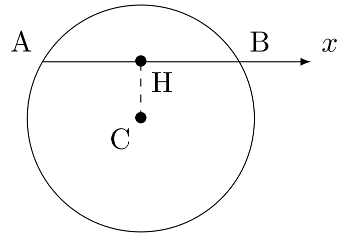
Colle n° 6 : Électromagnétisme 4

Exercice 1 - Énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée : Une sphère de rayon R porte la charge Q uniformément répartie en volume. On définit l'énergie de constitution (ou énergie coulombienne) de cette sphère comme le travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

1. Calculer le potentiel d'une boule uniformément chargé de rayon r.
2. La sphère a un rayon $r < R$. Calculer le travail qu'il faut fournir pour augmenter le rayon de cette sphère de $\mathrm{d}r$, en amenant les charges de l'infini.
3. En déduire l'expression de l'énergie de constitution de la sphère en fonction de Q et R.
4. Par analogie, en déduire l'énergie gravitationnelle d'une sphère de rayon R et de masse M.

Exercice 2 - Tunnel terrestre : On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de A sans vitesse initiale. On prendra $R_\mathrm{T} = 6.4 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $d = \mathrm{CH} = 5 \times 10^6\,\mathrm{m}$ et $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel terrestre à la distance r du centre de la terre.
2. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ de M.
3. Quelle est la vitesse maximale atteinte par M au cours du mouvement.
4. Déterminer le temps mis pour aller de A vers B.

Exercice 3 - Discontinuité de Bullard : On considère un modèle de Terre à symétrie sphérique de rayon R : on observe que le champ de gravitation $g(r)$ varie à l'intérieur de la manière suivante :

- $\vec{g}(r) = -\alpha r \vec{e_r}$ pour $0 < r < R/2$
- $\vec{g}(r) = -g_0 \vec{e_r}$ pour $R/2 < r < R$.

On note M la masse totale de la Terre, et G la constante de gravitation universelle. On pose également $\mu_<(r)$ la masse volumique dans la zone $r < R/2$ et $\mu_>(r)$ celle dans la zone $r > R/2$.

1. Utiliser le théorème de Gauss dans la zone $r < R/2$ pour déterminer $\mu_<$. On appliquera ce théorème à deux sphères de rayons r et $r + \mathrm{d}r$.
2. Faire de même pour trouver $\mu_>$.
3. Déterminer α.

Exercice 4 - Diode à vide : Une diode à vide est formée de deux électrodes planes parallèles, la cathode C et l'anode A, de surface S et séparées d'une distance d. La cathode est maintenue à un potentiel nul ($V_\mathrm{C} = 0$) mais elle est chauffée. Par effet thermoélectronique, elle libère des électrons ayant une vitesse faible (prise nulle pour la suite). Ces électrons sont dirigés vers l'anode qui est portée au potentiel $V_\mathrm{A} > 0$. On admet que les lignes de courant ainsi créées sont perpendiculaires aux deux plaques. La zone située entre les électrodes contient donc des électrons qui ont été émis sans vitesse initiale par la cathode.

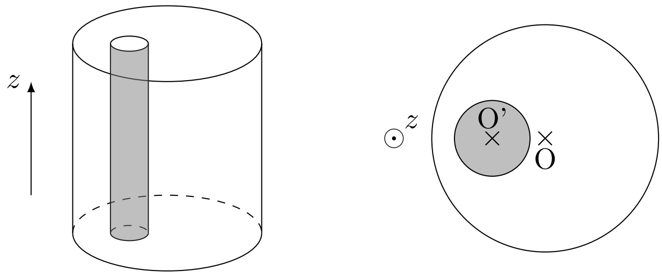
On néglige tout effet de bord et on ne s'intéresse qu'à l'espace inter-électrodes dans lequel on considère que la charge volumique ρ, le potentiel V, la vitesse v et l'intensité électrique I ne sont des fonctions que de x.

1. Retrouver l'équation reliant le potentiel V et la densité de charge ρ.
2. Par des arguments numériques, montrer que le poids des électrons peut être négligé devant la force électrostatique.
3. Calculer la vitesse des électrons en x en fonction du potentiel $V(x)$.
4. Déterminer l'expression de l'intensité $I(x)$ traversant une surface d'aire S située à une distance $x < d$ de la cathode et parallèle à celle-ci. Exprimer le résultat en fonction de $\rho(x)$, S et $v(x)$.

5. Montrer que l'intensité ne dépend pas de x.
6. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par V. On fera apparaître le paramètre $a = \dfrac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$.
7. Intégrer cette équation pour déterminer $V(x)$. On supposera que le champ et le potentiel sont nuls en $x = 0$.
8. En déduire la relation entre l'intensité I et le potentiel V_A de l'anode (loi de Child-Langmuir).

Exercice 5 - Câble coaxial : Un fil coaxial est constitué d'un conducteur plein de rayon r_1 traversé par un courant I, d'une couche isolante entre r_1 et r_2, et d'un conducteur entre r_2 et r_3 permettant le retour du courant. On suppose le câble infini.
1. Déterminer la densité de courant en tout point du câble coaxial.
2. Donner les symétries et invariances du champ magnétique.
3. Calculer l'intensité du champ en fonction du rayon.

Exercice 6 - Cavité dans un câble cylindrique : On considère un câble cylindrique de rayon R parcouru par une densité de courant $\vec{j}$ uniforme et parallèle à l'axe du cylindre. Le fil comporte une cavité cylindrique de rayon $a < R$, entièrement située dans le câble et excentrée par rapport à son axe.



1. Calculer le champ magnétique dans tout l'espace par le câble sans cavité.
2. À l'aide du théorème de superposition, calculer le champ magnétique dans la cavité du câble.

Exercice 7 - Modélisation d'un impact de foudre : On modélise un éclair et son arrivée sur le sol avec des courants dans le sol. L'éclair est modélisé par un fil infiniment fin parcouru par un courant d'intensité $I = 50\,\mathrm{kA}$. On utilisera les coordonnées sphériques de centre O le point d'impact de la foudre sur le sol.
1. Comment doit s'écrire la densité volumique de courant dans le sol pour que la loi des nœuds est-elle valide dans ce modèle ?
2. Analyser les symétries et invariances du champ $\vec{B}$ dans l'air.
3. Comment sont les lignes de champ magnétique ?
4. Calculer le champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère.
5. On admet que la densité de courant et le champ électrique sont reliés par la loi d'Ohm locale dans le sol : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, avec $\gamma > 0$ la conductivité, qui dépend du type de sol concerné. Déterminer le champ électrique dans le sol et le potentiel électrique au sol. Commenter.