Colle n° 8 : Électromagnétisme 3

Exercice 1 - Une solution réaliste des équations de Maxwell : On cherche une solution des équations de Maxwell dans le vide sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(z)e^{-t/\tau}\vec{e_x}$$
$$\vec{B}(M,t) = g(z)e^{-t/\tau}\vec{e_y}\,,$$

pour tout point M et tout instant t. Cette solution présente l'intérêt physique d'être un signal réaliste, puisque limité dans le temps.

1. Montrer que les expressions précédentes satisfont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. En utilisant les équations de Maxwell, trouver les équations satisfaites par les fonctions f et g.
3. On impose que f est paire, et que
$$\vec{E}(O,0) = E_0\vec{e_x}\,.$$
En déduire les expressions des champs électrique et magnétique.
4. Calculer le vecteur de Poynting associé à cette solution.

Exercice 2 - Condensateur en régime variable : Cet exercice a pour but de mettre en oeuvre l'approximation des régimes quasi stationnaires dans sa version électrique (aussi appelée ARQS des condensateurs). On utilisera également le théorème d'Ampère sous sa forme généralisée tenant compte du courant de déplacement.

On s'intéresse à un condensateur cylindrique de rayon a, dont les armatures d'axe commun (Oz) sont distantes de $\ell \ll a$. Le condensateur est placé en série avec une résistance R et un générateur de tension $U(t) = U_0 \cos\omega t$.

1. Le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est supposé égal à $\vec{E}_0 = E_0 e^{j\omega t}\vec{u}_z$. Calculer le champ magnétique $\vec{B}_1$ induit dans le condensateur par le champ électrique variable en utilisant les équations de Maxwell.
2. Le champ magnétique $\vec{B}_1$ étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique $\vec{E}_2$. Déterminer ce deuxième champ $\vec{E}_2$ en supposant $\vec{E_2}(r=0) = \vec{0}$. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur sous la forme :
$$\vec{E} = \left[1 - \alpha\left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\right]\vec{E_0}\,,$$
où α est une constante à déterminer.
On rappelle qu'en coordonnées sphériques, on a
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{X} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\vec{e_z}\,.$$
3. À quelle condition se trouve-t-on dans l'approximation des régimes quasi stationnaires ? Le champ $(\vec{E}, \vec{B}_1)$ est-il compatible avec l'équation de Maxwell-Ampère ? Comment pourrait-on résoudre la difficulté qui se pose ?
4. On cherche une solution exacte du problème sous la forme :
$$\vec{E}(r,t) = E(r)e^{j\omega t}\vec{e_z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)^n e^{j\omega t}\vec{u}_z\,.$$
   (a) Montrer que $\Delta E(r) = -\frac{\omega^2}{c^2}E(r)$ avec Δ l'opérateur Laplacien scalaire qui, en coordonnées cylindriques, s'exprime par
   $$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial a}{\partial\theta} + \frac{\partial a}{\partial z}\,.$$
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre les a_n, et trouver alors l'expression du champ électrique dans le condensateur.

Exercice 3 - Solénoïde en régime variable : On étudie un solénoïde de longueur ℓ et de rayon a, constitué de N spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant $i(t)$. On suppose $\ell \gg a$, de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini.

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde. On supposera $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}(r,t)$ induit en fonction de μ_0, r, $n = N/\ell$ et a. On se limitera au cas $r < a$.
3. Le solénoïde est pacouru par un courant $i(t) = I_m\cos(\omega t)$.
   (a) Exprimer la densité volumique d'énergie magnétique w_B.

(b) Exprimer la densité volumique d'énergie électrique w_E.

(c) Que peut-on dire du rapport des valeurs moyennes $\dfrac{\langle w_E \rangle}{\langle w_B \rangle}$ dans la limite $a \ll \lambda$?

4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ pour $r = a$ en fonction de μ_0, n, a, et $i(t)$.
5. Déterminer l'expression de l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_m$ emmagasinée à l'instant t dans le solénoïde en fonction de μ_0, n, a, ℓ et $i(t)$.
6. Déterminer l'expression du coefficient d'inductance propre $\mathcal{L}$ en fonction de N, μ_0, a et ℓ.

Exercice 4 - Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique : Un système électrique cylindrique, de hauteur h, est constitué de deux cylindres métalliques creux coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre intérieur reçoit initialement une charge $+\dfrac{Q}{2}$ et le cylindre extérieur une charge $-\dfrac{Q}{2}$. Le milieu qui les sépare a les propriétés diélectriques du vide, mais il est légèrement conducteur, de conductivité γ. On négligera les effets de bord, ainsi que la dépendance en fréquence de la conductivité.

1. Déterminer la valeur du champ électrique à l'instant initial. Faire de même à l'état final.
2. Que vaut le champ magnétique à tout instant ? Comment s'écrit la variation d'énergie électromagnétique entre l'instant initial et l'instant final ?
3. Que vaut le vecteur de Poynting ? Que peut-on dire de la variation d'énergie électromagnétique calculée précédemment ?
4. Déterminer le vecteur densité de courant électrique $\overrightarrow{j}$ à tout instant. En déduire la quantité d'énergie dissipée par effet Joule. Commenter.

Exercice 5 - Courants de Foucault : On considère un conducteur cylindrique de rayon R, de longueur infinie, et de conductivité γ. Ce conducteur est placé dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe de révolution :

$$\overrightarrow{B}(t) = \overrightarrow{B}_0 \cos(\omega t)\,\overrightarrow{e}_z\,.$$

1. Calculer la distribution de courant $\overrightarrow{j}_1$ induite par ce champ magnétique. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{X} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}\,.$$

2. En déduire la puissance dissipée $\mathcal{P}$ par unité de longueur du conducteur.
3. Un champ $\overrightarrow{B}_1$ est produit par le courant induit $\overrightarrow{j}_1$. Calculer ce champ induit dans le cadre de l'ARQS magnétique. Comment se compare-t-il au champ appliqué ?

Exercice 6 - Impulsion du champ électromagnétique : On considère une onde plane, progressive harmonique se propageant suivant (Oz), dont le champ électrique a la forme suivante :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}\,.$$

1. Quelle est la polarisation de cette onde ?
2. Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ associé.
3. Retrouver la relation de dispersion. On prendra $k > 0$ pour la suite.
4. Quel est le sens de propagation de l'onde ?
5. Calculer la valeur moyenne $\langle w \rangle$ de la densité d'énergie électromagnétique véhiculée par cette onde.
6. La grandeur $\overrightarrow{P} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$ est appelée impulsion volumique du champ électromagnétique. Quelle est sa dimension ?
7. La modélisation quantique du champ électromagnétique fait appel à la notion de photon, particule élémentaire de masse nulle dont l'énergie et la quantité de mouvement sont directement reliées aux propriétés de l'onde qu'il compose :

$$\mathcal{E}_{photon} = \hbar\omega \text{ et } p_{photon} = \frac{\mathcal{E}_{photon}}{c}\,.$$

(a) Retrouver ces deux expressions à partir de la relation de De Broglie $\overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k}$ et de l'expression relativiste de l'énergie $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

(b) Quelle densité particulaire n de photons peut être associée à cette onde ?

(c) En déduire la valeur de l'impulsion volumique de l'onde, et comparer à $\overrightarrow{p}$. Commenter.

Colle n° 8 : Électromagnétisme 3

Exercice 7 - Une solution réaliste des équations de Maxwell : On cherche une solution des équations de Maxwell dans le vide sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(z)e^{-t/\tau}\vec{e_x}$$
$$\vec{B}(M,t) = g(z)e^{-t/\tau}\vec{e_y}\,,$$

pour tout point M et tout instant t. Cette solution présente l'intérêt physique d'être un signal réaliste, puisque limité dans le temps.

1. Montrer que les expressions précédentes satisfont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. En utilisant les équations de Maxwell, trouver les équations satisfaites par les fonctions f et g.
3. On impose que f est paire, et que
$$\vec{E}(O,0) = E_0\vec{e_x}\,.$$
En déduire les expressions des champs électrique et magnétique.
4. Calculer le vecteur de Poynting associé à cette solution.

Exercice 8 - Condensateur en régime variable : Cet exercice a pour but de mettre en oeuvre l'approximation des régimes quasi stationnaires dans sa version électrique (aussi appelée ARQS des condensateurs). On utilisera également le théorème d'Ampère sous sa forme généralisée tenant compte du courant de déplacement.

On s'intéresse à un condensateur cylindrique de rayon a, dont les armatures d'axe commun (Oz) sont distantes de $\ell \ll a$. Le condensateur est placé en série avec une résistance R et un générateur de tension $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

1. Le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est supposé égal à $\vec{E}_0 = E_0 e^{j\omega t}\vec{u}_z$. Calculer le champ magnétique $\vec{B}_1$ induit dans le condensateur par le champ électrique variable en utilisant les équations de Maxwell.
2. Le champ magnétique $\vec{B}_1$ étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique $\vec{E}_2$. Déterminer ce deuxième champ $\vec{E}_2$ en supposant $\vec{E_2}(r=0) = \vec{0}$. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur sous la forme :
$$\vec{E} = \left[1 - \alpha\left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\right]\vec{E_0}\,,$$
où α est une constante à déterminer.
On rappelle qu'en coordonnées sphériques, on a
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{X} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\vec{e_z}\,.$$
3. À quelle condition se trouve-t-on dans l'approximation des régimes quasi stationnaires ? Le champ $(\vec{E}, \vec{B}_1)$ est-il compatible avec l'équation de Maxwell-Ampère ? Comment pourrait-on résoudre la difficulté qui se pose ?
4. On cherche une solution exacte du problème sous la forme :
$$\vec{E}(r,t) = E(r)e^{j\omega t}\vec{e_z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\omega}{c}\right)^n e^{j\omega t}\vec{u}_z\,.$$
   (a) Montrer que $\Delta E(r) = -\frac{\omega^2}{c^2}E(r)$ avec Δ l'opérateur Laplacien scalaire qui, en coordonnées cylindriques, s'exprime par
   $$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial a}{\partial \theta} + \frac{\partial a}{\partial z}\,.$$
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre les a_n, et trouver alors l'expression du champ électrique dans le condensateur.

Exercice 9 - Solénoïde en régime variable : On étudie un solénoïde de longueur ℓ et de rayon a, constitué de N spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant $i(t)$. On suppose $\ell \gg a$, de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini.

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde. On supposera $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}(r,t)$ induit en fonction de μ_0, r, $n = N/\ell$ et a. On se limitera au cas $r < a$.
3. Le solénoïde est pacouru par un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.
   (a) Exprimer la densité volumique d'énergie magnétique w_B.

(b) Exprimer la densité volumique d'énergie électrique w_E.

(c) Que peut-on dire du rapport des valeurs moyennes $\dfrac{\langle w_E\rangle}{\langle w_B\rangle}$ dans la limite $a \ll \lambda$?

4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ pour $r = a$ en fonction de μ_0, n, a, et $i(t)$.
5. Déterminer l'expression de l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_m$ emmagasinée à l'instant t dans le solénoïde en fonction de μ_0, n, a, ℓ et $i(t)$.
6. Déterminer l'expression du coefficient d'inductance propre $\mathcal{L}$ en fonction de N, μ_0, a et ℓ.

Exercice 10 - Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique : Un système électrique cylindrique, de hauteur h, est constitué de deux cylindres métalliques creux coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre intérieur reçoit initialement une charge $+\dfrac{Q}{2}$ et le cylindre extérieur une charge $-\dfrac{Q}{2}$. Le milieu qui les sépare a les propriétés diélectriques du vide, mais il est légèrement conducteur, de conductivité γ. On négligera les effets de bord, ainsi que la dépendance en fréquence de la conductivité.

1. Déterminer la valeur du champ électrique à l'instant initial. Faire de même à l'état final.
2. Que vaut le champ magnétique à tout instant ? Comment s'écrit la variation d'énergie électromagnétique entre l'instant initial et l'instant final ?
3. Que vaut le vecteur de Poynting ? Que peut-on dire de la variation d'énergie électromagnétique calculée précédemment ?
4. Déterminer le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ à tout instant. En déduire la quantité d'énergie dissipée par effet Joule. Commenter.

Exercice 11 - Courants de Foucault : On considère un conducteur cylindrique de rayon R, de longueur infinie, et de conductivité γ. Ce conducteur est placé dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe de révolution :

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t)\,\vec{e}_z\,.$$

1. Calculer la distribution de courant $\vec{j}_1$ induite par ce champ magnétique. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{X} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]\vec{e_\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\vec{e_z}\,.$$

2. En déduire la puissance dissipée $\mathcal{P}$ par unité de longueur du conducteur.
3. Un champ $\vec{B}_1$ est produit par le courant induit $\vec{j}_1$. Calculer ce champ induit dans le cadre de l'ARQS magnétique. Comment se compare-t-il au champ appliqué ?

Exercice 12 - Onde plane associée à un faisceau laser : : Un faisceau laser de longueur d'onde λ émet une onde plane monochromatique polarisée rectilignement qui se propage dans le plan (Oxy) et faisant un angle $\alpha = \pi/3$ avec l'axe (Ox).Le faisceau est polarisé rectilignement suivant (Oz).

1. Déterminer le vecteur d'onde, le champ électromagnétique, ainsi que le vecteur de Poynting associés à ce faisceau. On notera E_0 l'amplitude du champ électrique.
2. Calculer leur norme dans le cas d'un laser à Argon ($\lambda = 488\,\mathrm{nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de section $1\,\mathrm{mm}^2$ et de puissance moyenne $1\,\mathrm{W}$.