

Table des matières

1 Les lois du frottement solide	1
1.1 Les lois de Coulomb	1
1.2 Les différentes phases possibles	2
1.3 Travail d'une force de frottement solide	5
2 Cinématique et changement de référentiels	6
2.1 Notion de point coïncident.	6
2.2 Loi de composition des vitesses	6
2.3 Loi de composition des accélérations	8
3 Dynamique en référentiel non galiléen	11
3.1 Seconde loi de Newton en référentiel non galiléen	11
3.2 Aspects énergétiques	11
3.3 Caractère non galiléen du référentiel terrestre.	13
3.4 Dynamique dans le référentiel terrestre	15
4 Complément : statique des fluides	18
4.1 Relation fondamentale de la statique des fluides	18
4.2 Théorème d'Archimède.	21

Ce chapitre complète le cours de première année de mécanique.

1 Les lois du frottement solide

1.1 Les lois de Coulomb

On considère une masse m en contact avec un support et en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport à celui-ci. La **réaction** \vec{R} du support est la force exercée par le support sur la masse et s'applique au barycentre de la surface de contact. Cette réaction se décompose en deux forces

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

où

- ▷ \vec{N} est la force de réaction **normale** au support ;
- ▷ \vec{T} est la force de réaction **tangentielle** au support, de direction **opposée à la vitesse du solide par rapport au support** en cas de mouvement. En cas d'équilibre, elle est orientée tangen-

tiellement à la surface pour permettre cet équilibre.

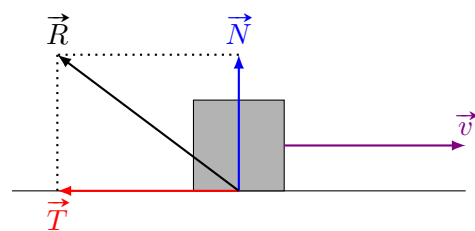


Fig. 1 – Les forces de frottements solide.

Théorème. Les relations entre les modules des forces \vec{N} et \vec{T} sont appelées les **lois du frottement de Coulomb** :

▷ si le solide est en glissement sur la surface, alors $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$;

▷ si le solide ne glisse pas sur la surface, alors $\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$.

Le coefficient f_d est le **coefficient de frottement dynamique** et f_s est le **coefficient de frottement statique**.

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Il s'agit d'une inégalité en **normes** des vecteurs, il n'existe pas de relation entre les vecteurs.

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Si la surface est mobile, il faut considérer la vitesse relative de glissement $\vec{v}_g = \vec{v}_{\text{solide}} - \vec{v}_{\text{surface}}$. Le solide ne glisse pas sur la surface si cette vitesse \vec{v}_g est nulle.

En général, f_d est légèrement inférieur à f_s , sauf pour certaines applications (freins céramique par exemple) pour lesquelles le coefficient de frottement augmente avec la vitesse de glissement. Cela implique que la mise en mouvement nécessite une force plus importante que celle nécessaire pour le maintien de ce mouvement. Ce sont des nombres sans dimension, généralement peu précis (un ou deux chiffres significatifs), inférieur à 1 et qui dépend fortement de l'état de surface (humide, graissée...) mais pas de la valeur de la surface.

Remarque : L'étude des frottements constitue le domaine de la tribologie. Il s'agit d'un domaine de recherche très vaste et rapidement très complexe à étudier car des processus microscopiques dépendant des matériaux entrent en jeu au niveaux des surfaces de contacts.

	f_s	f_d
freins sur acier	$\simeq 0.4$	$\simeq 0.25$
pneu sur route sèche	$\simeq 0.9$	$\simeq 0.5$
pneu sur route mouillée	$\simeq 0.6$	$\simeq 0.35$
pneu sur neige	$\simeq 0.2$	
pneu sur glace	$\simeq 0.05$	

Tab. 1 – Quelques ordres de grandeur

Lors que les coefficients de frottement sont très proches, on fait généralement l'hypothèse qu'ils sont égaux.

Propriété. Si on suppose l'absence de frottements solides, on a $f_d = f_s = 0$ soit $T = 0$. La force normale n'est jamais nulle, ne serait-ce que pour compenser en partie le poids.

Hypothèse de contact :

Propriété. La force de réaction normale est non nulle en cas de contact. Dès que le contact est rompu, elle s'annule.

Application 1 : Soit un pingouin au sommet d'un igloo demi-sphérique. On néglige tout phénomène de frottement. Déterminer l'angle fait par le pingouin par rapport à la verticale de l'igloo au moment de son décollage.

1.2 Les différentes phases possibles

On fait l'hypothèse que les coefficients de frottements statiques et dynamiques sont égaux.

1.2.1 Hypothèse de glissement

Propriété. La phase **statique** s'arrête lorsque la condition $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ n'est plus respectée.

Les forces \vec{T} et \vec{N} se déduisent de la condition d'absence de mouvement (donc à travers la seconde loi de Newton et une accélération nulle).

Cette hypothèse peut être vue en raisonnant par l'absurde. On suppose que le mouvement est statique. Si cela conduit à ne pas respecter cette inégalité alors l'hypothèse statique est absurde et le solide est en mouvement.

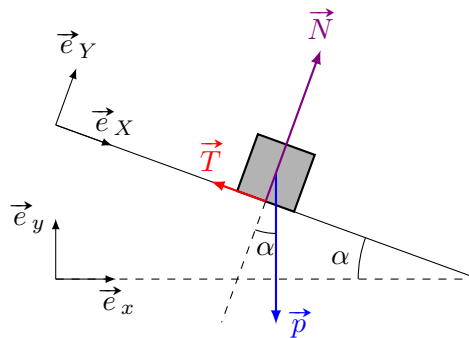
Ensuite, la force tangentielle s'annule à l'instant où la vitesse s'annule. À cet instant, la condition dynamique n'est plus vérifiée et la condition statique est vérifiée. Toutefois, si les autres forces sont suffisamment importantes, cette hypothèse statique peut être instantanément mise en défaut et le mouvement se poursuit avec généralement une inversion de la vitesse de glissement. Mais en l'absence de ces autres forces, les frottements ne permettent pas à la vitesse de changer de signe. Par exemple, une masse ne peut pas remonter toute seule une pente.

Propriété. La phase de **glissement** s'arrête lorsque la vitesse par rapport au support s'annule et que la condition $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ peut être vérifiée.

1.2.2 L'équilibre

On étudie une masse m sur un plan incliné d'angle α . Cette étude est réalisée dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen et on se placera en coordonnées cartésiennes.

Deux types de coordonnées cartésiennes peuvent être définies sur le problème, les coordonnées (x, y) et (X, Y) . L'utilisation de l'une ou de l'autre facilite les calculs mais mènera au même résultat.



Pour le moment, la masse ne bouge pas. La somme des forces est donc nulle. Comme le poids tend à faire tomber la masse, la force de réaction tangentielle s'y oppose. Elle est donc dirigée vers le haut.

Bilan des forces :

- ▷ le poids $\vec{p} = m\vec{g} = -mg \cos \alpha \vec{e}_Y + mg \sin \alpha \vec{e}_X$;
- ▷ la réaction normale $\vec{N} = N \vec{e}_Y$;
- ▷ la réaction tangentielle $\vec{T} = -T \vec{e}_X$.

On applique la **seconde loi de Newton** :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{N} + \vec{T} = -mg \cos \alpha \vec{e}_Y + mg \sin \alpha \vec{e}_X + N \vec{e}_Y - T \vec{e}_X .$$

Il s'agit d'un problème de **statique** donc $\vec{a} = \vec{0}$. On peut projeter la relation vectorielle précédente sur les axes \vec{e}_X et \vec{e}_Y et il vient $-mg \cos \alpha + N = 0$ et $mg \sin \alpha - T = 0$. Soit

$$T = mg \sin \alpha \quad \text{et} \quad N = mg \cos \alpha .$$

Remarque : Dans les problèmes de frottements statiques, les inconnues sont souvent les modules des forces de frottement.

Or on peut utiliser les lois de Coulomb. Lors du frottement statique, on $T < fN$ soit

$$\frac{T}{N} = \tan \alpha < f .$$

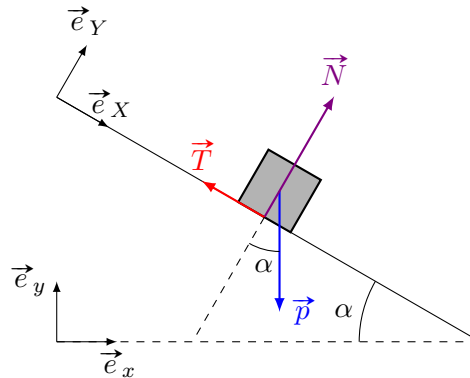
Propriété. On définit l'**angle limite de glissement** α_{lim} tel que

$$\tan \alpha_{\text{lim}} = f .$$

Si $\alpha < \alpha_{\text{lim}}$, la masse peut être statique. Sinon, la masse se met en mouvement.

1.2.3 La mise en mouvement sans vitesse initiale

On étudie une masse m sur un plan incliné d'angle α . Cette étude est réalisée dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen et on se placera en coordonnées cartésiennes. On suppose maintenant que $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$. La masse est laissée sans vitesse initiale mais la condition d'équilibre est rompue, elle va descendre. Cet argument permet de définir le sens de la force de frottement tangentielle.



Remarque : Pour le moment, la masse ne bouge pas. On ne peut donc pas théoriquement placer la force tangentielle. Mais spontanément, si la force n'est pas dirigée vers le haut, la somme des forces ne sera pas nulle et la masse va tomber, ce qui n'est pas possible dans le problème de statique.

Bilan des forces :

- ▷ le poids $\vec{p} = m\vec{g} = -mg \cos \alpha \vec{e}_Y + mg \sin \alpha \vec{e}_X$;
- ▷ la réaction normale $\vec{N} = N \vec{e}_Y$;
- ▷ la réaction tangentielle $\vec{T} = -T \vec{e}_X$.

On applique la **seconde loi de Newton** :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{N} + \vec{T} = -mg \cos \alpha \vec{e}_Y + mg \sin \alpha \vec{e}_X + N \vec{e}_Y - T \vec{e}_X .$$

On exprime les vecteurs cinématiques. Comme la masse reste sur la plan, tous les vecteurs cinématiques seront selon sur le vecteur \vec{e}_X . Il vient

$$\vec{a}(t) = \ddot{X}(t) \vec{e}_X \quad \text{et} \quad \vec{v}(t) = \dot{X}(t) \vec{e}_X \quad \text{et} \quad \text{OM}(t) = X(t) \vec{e}_X .$$

On projette les différents vecteurs sur la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y) et il vient

$$0 = -mg \cos \alpha + N \quad \text{et} \quad \ddot{X} = mg \sin \alpha - T . \quad (1.1)$$

La première équation correspond à la projection selon \vec{e}_Y et traduit l'absence de mouvement sur cet axe et donc l'équilibre des forces. Il vient donc

$$N = mg \cos \alpha .$$

Par ailleurs, lors du mouvement, la loi du frottement de Coulomb indique $T = fN$ soit donc

$$T = fN = fmg \cos \alpha .$$

En remplaçant dans l'équation sur l'accélération, il vient

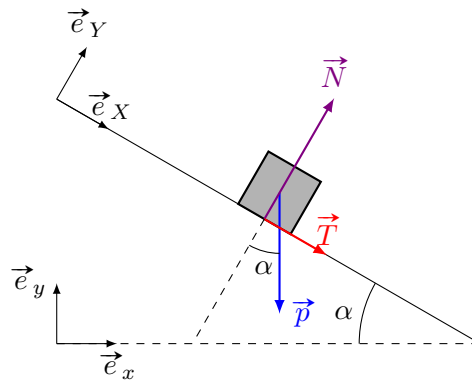
$$\ddot{X} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \alpha_{\text{lim}}) . \quad (1.2)$$

Comme $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$, l'accélération est bien positive. La masse se met à glisser vers le bas. Il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Si la masse est posée sans vitesse initiale et que l'on suppose que $X(0) = 0$, il vient simplement

$$X(t) = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 .$$

1.2.4 Lancer avec vitesse initiale vers le haut

On considère cette fois une vitesse initiale vers le haut soit $\vec{v}_0 = -V_0 \vec{e}_X$ et $V_0 > 0$. Par rapport à la situation précédente, la force tangentielle est dans l'autre sens.



On projette les différents vecteurs sur la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y) et il vient

$$0 = -mg \cos \alpha + N \quad \text{et} \quad \ddot{X} = mg \sin \alpha + T. \quad (1.3)$$

La première équation correspond à la projection selon \vec{e}_Y et traduit l'absence de mouvement sur cet axe et donc l'équilibre des forces. Il vient donc à nouveau

$$N = mg \cos \alpha.$$

Par ailleurs, lors du mouvement, la loi du frottement de Coulomb indique $T = fN$ soit donc

$$T = fN = fmg \cos \alpha.$$

En remplaçant dans l'équation sur l'accélération, il vient

$$\ddot{X} = g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = g \cos \alpha (\tan \alpha + \tan \alpha_{\text{lim}}). \quad (1.4)$$

On a alors

$$X(t) = \frac{1}{2}g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t^2 - V_0 t.$$

L'arrêt correspond à $t_1 = g(\sin \alpha + f \cos \alpha) / V_0$.

La vitesse par rapport au support est nulle, la condition d'arrêt est vérifiée. Il existe alors deux cas :

- ▷ $\alpha < \alpha_{\text{lim}}$, la condition statique du paragraphe 1.2.2 est vérifiée, la masse s'arrête ;
- ▷ $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$, la condition statique du paragraphe 1.2.2 n'est pas vérifiée, la masse repart dans l'autre sens et nous revenons à la condition du paragraphe 1.2.3 précédent.

1.3 Travail d'une force de frottement solide

La force de réaction normale étant orthogonale au déplacement, elle ne travaille pas.

On note \vec{T} la force de frottement solide tangentielle. Elle est de norme T constante et opposée au vecteur vitesse.

Par définition, le travail sur un chemin Γ vaut

$$W_\Gamma = \int_\Gamma \vec{T} \cdot v dt = \int_\Gamma \vec{T} \cdot d\vec{\ell} = -T \int_\Gamma dl.$$

Ainsi, on a

$$W_\Gamma = -T \mathcal{L}_\Gamma$$

avec \mathcal{L}_Γ la longueur du chemin Γ .

Ce travail est toujours négatif, ce qui matérialise le fait que le frottement solide correspond nécessairement à une perte d'énergie pour le système.

2 Cinématique et changement de référentiels

Considérons, par exemple, le mouvement d'une roue de vélo sur une route rectiligne à vitesse uniforme. Il est possible d'avoir plusieurs points de vue pour décrire le mouvement, et donc plusieurs référentiels. On peut citer :

- ▷ le référentiel de la route ;
- ▷ le référentiel du vélo dans lequel un point de la roue est circulaire uniforme ;
- ▷ le référentiel de la roue dans lequel elle est fixe.

Parmi ces référentiels, seul le premier peut être approximé comme galiléen comme vu en première année. Toutefois, il est possible d'étudier le mouvement dans les autres référentiels. Pour cela, il est nécessaire d'étudier tout d'abord le changement de référentiel.

2.1 Notion de point coïncident

Soient deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_1 . On étudie le mouvement de \mathcal{R}_1 (qualifié de « mobile ») dans \mathcal{R} (qualifié de « fixe »).

Remarque : Pour plus de simplicité, on parlera d'un référentiel mobile dans un référentiel fixe. Ceci est totalement relatif et arbitraire, un changement de point de vue permet d'inverser les deux rôles !

On étudie le mouvement d'un point M . À l'instant t , on note C la position du M dans \mathcal{R}_1 . Cette position est fixe dans le référentiel \mathcal{R}_1 car il s'agit d'une position que le point mobile a occupé à un instant donné. Toutefois, ce point est en mouvement dans \mathcal{R} . Ainsi, le mouvement du point C est lié au mouvement d'un référentiel dans l'autre alors que le mouvement du point M est lié au mouvement du système. Ces deux points ne coïncident qu'à l'instant t .

Définition. Le **point coïncident** est le point fixe du référentiel mobile \mathcal{R}_1 qui, à l'instant t , coïncide avec le point mobile M .

Insistons sur le fait que le point coïncident est un point appartenant au référentiel mobile par définition : il est donc rigidement lié à ce référentiel qui l'emporte avec lui dans son mouvement. Il en résulte que le point mobile M ne coïncide avec celui-ci qu'à l'instant t . Il est donc possible de définir autant de point coïncidents que d'instant.

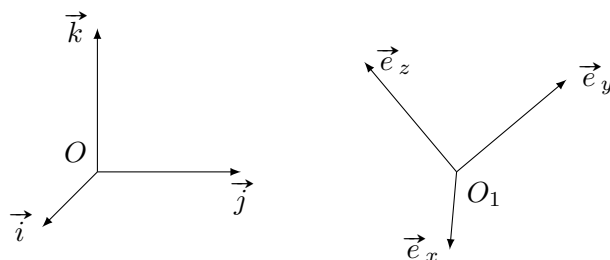
Par exemple, prenons une mouche en mouvement dans une voiture. Si, à l'instant t , la mouche se pose sur le volant, cette position représente le point coïncident à l'instant t . Si ensuite la mouche se met en mouvement et se pose sur le rétroviseur, cette position est celle du point coïncident de ce nouvel instant.

Propriété. Le point coïncident permet de décrire le mouvement des référentiels l'un par rapport à l'autre. Il est fixe dans le référentiel mobile et mobile dans le référentiel fixe.

Il n'est lié au mouvement du système que par sa définition. Une fois qu'il est défini, il ne faut plus réfléchir par rapport au mouvement du système.

2.2 Loi de composition des vitesses

On considère deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}_1 de centres O et O_1 et d'axes fixes portés par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. \mathcal{R} est choisi comme référence (considéré comme fixe).



Remarque : Les axes choisis pour les référentiels servent simplement à caractériser le mouvement relatif des deux référentiels et ne doivent pas être confondus avec les bases de projection. Il est en particulier possible de choisir des bases de projections mobiles dans les deux référentiels.

On caractérise le mouvement de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} avec les mêmes grandeurs que le mouvement d'un solide :

- ▷ 3 coordonnées de translation,
- ▷ 3 coordonnées de rotation.

Soit \overrightarrow{OM} un vecteur quelconque variable au cours du temps. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$. On note

$$\overrightarrow{O_1M} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z .$$

En dérivant cette relation, il vient

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \dot{x} \vec{e}_x + x \dot{\vec{e}}_x + \dot{y} \vec{e}_y + y \dot{\vec{e}}_y + \dot{z} \vec{e}_z + z \dot{\vec{e}}_z . \quad (2.1)$$

Définition. On appelle **vitesse relative** \vec{v}_r la vitesse du point mobile dans le référentiel \mathcal{R}_1 . On appelle **vitesse d'entraînement** \vec{v}_e la vitesse du point coïncident dans le référentiel \mathcal{R} .

On a donc par définition

$$\vec{v}_r = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z .$$

Par définition, le point coïncident est le point de coordonnées fixes x, y et z . Les dérivées des coordonnées d'espace x, y et z de ce point sont donc fixes. Sa vitesse dans le référentiel \mathcal{R} est donc

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x \dot{\vec{e}}_x + y \dot{\vec{e}}_y + z \dot{\vec{e}}_z .$$

Propriété. La loi de composition des vitesses indique alors

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}_e + \vec{v}_r .$$

La vitesse d'entraînement est la vitesse que M acquiert du fait du mouvement de \mathcal{R}_1 . M est **entraîné** par le mouvement de \mathcal{R}_1 , de même que le passager d'un train est entraîné par le mouvement du véhicule.

2.2.1 Expression de la vitesse d'entraînement

L'expression de la vitesse d'entraînement peut se déduire rapidement du mouvement du point coïncident dans le référentiel \mathcal{R} .

Translation instantanée : Le référentiel \mathcal{R}_1 est en translation par rapport au référentiel \mathcal{R} . Cela implique donc que les vecteurs de base de la base mobile restent fixes, soit $\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$.

Le point coïncident est en translation instantanée dans le référentiel \mathcal{R} , il vient donc

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x \dot{\vec{e}}_x + y \dot{\vec{e}}_y + z \dot{\vec{e}}_z = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}$$

Cette vitesse n'est pas nécessairement constante (en norme et en direction). On remarque que dans le cas d'un mouvement relatif de translation, tous les points de \mathcal{R}_1 ont la même vitesse d'entraînement.

Rotation instantanée : Le point coïncident est en rotation instantanée dans le référentiel \mathcal{R} , les centres O et O_1 sont confondus soit $\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} = \vec{0}$. On note $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} :

- ▷ sa direction donne l'axe autour duquel se fait la rotation,
- ▷ son sens donne le sens de la rotation (orienté dans le sens positif par le vecteur $\vec{\Omega}$),
- ▷ sa norme est égale à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (en rad/s).

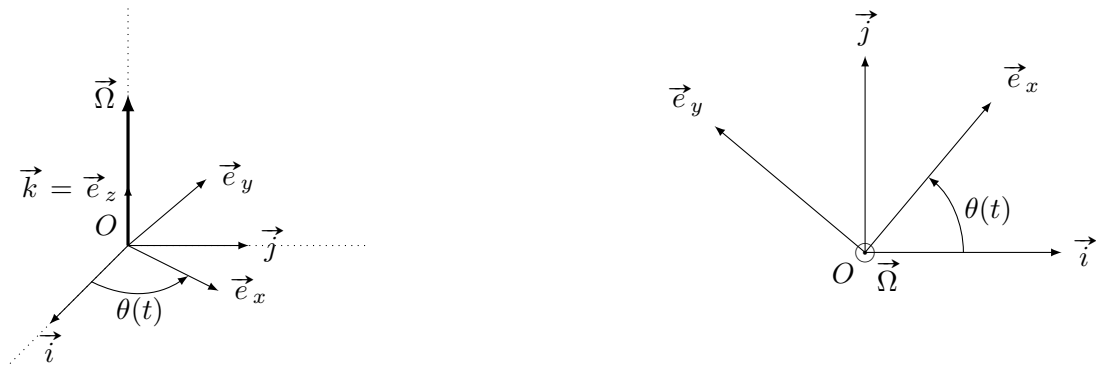


Fig. 2 – Graphe de la situation de repère en rotation instantanée. On suppose qu'un de axes est conjoint aux deux repères pour simplifier la visualisation.

De la même façon que pour démontrer les relations de dérivation des vecteurs de la base cylindriques, on a

$$\vec{e}_x = \cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_x}{dt} = -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta(t) \vec{j} = \dot{\theta} \vec{e}_y$$

On constate donc

$$\dot{\vec{e}}_x = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x .$$

On retrouve la même relation pour les autres vecteurs de base que l'on peut généraliser à tout vecteur $\vec{\Omega}$.

Il vient donc

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x \dot{\vec{e}}_x + y \dot{\vec{e}}_y + z \dot{\vec{e}}_z = \vec{0} + \vec{\Omega} \wedge (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) .$$

Il vient alors

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M} .$$

La vitesse d'entraînement dépend ici de la position du point d'étude dans le référentiel. Plus le point est loin du centre de rotation, plus sa vitesse d'entraînement est élevée.

Exemple 1 : Soit un manège tournant à la vitesse angulaire ω . On étudie le mouvement de la personne récupérant les billets des enfants. Le référentiel fixe est le référentiel terrestre et le référentiel en mouvement est lié au manège.

À l'instant t , la personne est situé au point $r \vec{e}_r$. Cette position est celle du point coïncident fixe dans le référentiel du manège. La vitesse de ce point coïncident est directement $r\omega \vec{e}_\theta$.

Cas quelconque : Dans le cas quelconque, la translation et la rotation sont possibles, soit

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M} .$$

2.3 Loi de composition des accélérations

On cherche à déterminer l'accélération du point M , pour cela, il est nécessaire de dériver la relation (2.1), soit

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + \ddot{x} \vec{e}_x + x \dot{\vec{e}}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + y \dot{\vec{e}}_y + \ddot{z} \vec{e}_z + z \dot{\vec{e}}_z + 2(\dot{x} \dot{\vec{e}}_x + \dot{y} \dot{\vec{e}}_y + \dot{z} \dot{\vec{e}}_z) . \quad (2.2)$$

Définition. On appelle **accélération relative** \vec{a}_r l'accélération du point mobile dans le référentiel \mathcal{R}_1 . On appelle **accélération d'entraînement** \vec{a}_e l'accélération du point coïncident dans le référentiel \mathcal{R} .

On a donc par définition

$$\vec{a}_r = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z .$$

*** **Attention !** L'accélération relative n'est pas la dérivée de la vitesse relative car les vecteurs de base ne sont pas fixes.

De plus, le point coïncident est fixe dans \mathcal{R}_1 , les dérivées premières et secondes des coordonnées d'espace x, y et z de ce point sont donc fixes.

On a donc

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + x \ddot{e}_x + y \ddot{e}_y + z \ddot{e}_z .$$

On constate que d'autres termes sont présents dans l'expression (2.2) en plus de ces deux accélérations. Ce terme supplémentaire provient du fait que le point de \mathcal{R}_1 coïncide avec le point M à l'instant t n'est pas le même que celui à $t + dt$. On a alors

$$\vec{a}_c = 2(\dot{x} \dot{\vec{e}}_x + \dot{y} \dot{\vec{e}}_y + \dot{z} \dot{\vec{e}}_z) .$$

2.3.1 Expression de l'accélération d'entraînement

L'expression de l'accélération d'entraînement peut se déduire rapidement du mouvement du point coïncident dans le référentiel \mathcal{R} .

Translation instantanée : Le référentiel \mathcal{R}_1 est en translation par rapport au référentiel \mathcal{R} . Cela implique donc que les vecteurs de base de la base mobile restent fixes, soit $\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$.

Le point coïncident est en translation instantanée dans le référentiel \mathcal{R} , il vient donc $\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2}$.

Cette accélération n'est pas nécessairement constante (en norme et en direction). On remarque que dans le cas d'un mouvement relatif de translation, tous les points de \mathcal{R}_1 ont la même accélération d'entraînement.

Rotation instantanée : Le point coïncident est en rotation instantanée dans le référentiel \mathcal{R} , les centres O et O_1 sont confondus soit $\frac{d \overrightarrow{OO_1}}{dt} = \vec{0}$. On note $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} . On reprend les notations de la figure 2.

On a vu que $\frac{d \vec{e}_x}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_y$, il vient donc

$$\frac{d^2 \vec{e}_x}{dt^2} = \ddot{\theta} \vec{e}_y + \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_y = \ddot{\theta} \vec{e}_y - \dot{\theta}^2 \vec{e}_x .$$

On constate donc

$$\dot{\vec{e}}_x = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x) .$$

On retrouve la même relation pour les autres vecteurs de base que l'on peut généraliser à tout vecteur $\vec{\Omega}$.

Il vient donc

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + x \ddot{e}_x + y \ddot{e}_y + z \ddot{e}_z = \vec{0} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1 M}) .$$

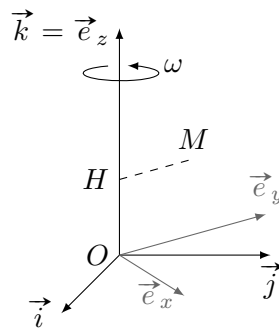
*** **Attention !** En notant C le point coïncident, on a $\vec{a}_{C/\mathcal{R}} = \left(\frac{d \vec{v}_{C/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ car C est fixe dans \mathcal{R}_1 mais

$\vec{a}_e(M) \neq \left(\frac{d \vec{v}_e(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ car $\vec{v}_e(M)$ dépend du point M qui n'est pas fixe dans \mathcal{R}_1 .

Exemple 2 : Reprenons l'exemple du manège en rotation du paragraphe précédent. Le point coïncident est en mouvement circulaire uniforme donc $\vec{a}_e = r \dot{\omega} \vec{e}_r - r \omega^2 \vec{e}_\theta$. On remarque que ce n'est pas la dérivée de la vitesse d'entraînement car r représente la distance du système au centre qui change avec le temps.

Dans le cas d'une rotation uniforme, on peut retenir que l'accélération d'entraînement vaut $\vec{a}_e = -r \omega^2 \vec{e}_r$ avec r la distance de la particule à l'axe de rotation.

Cas de la rotation uniforme : On est dans le cas du schéma ci-dessous. On note la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{e}_z$ avec $\omega = \text{Cte}$.



Le point H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. L'accélération d'entraînement vaut directement $\vec{a}_e = -r\omega^2 \vec{e}_\theta$ avec r la distance HM . On peut donc retenir l'expression de l'accélération d'entraînement dans le cas d'une rotation uniforme $\vec{a}_e = -\omega^2 \overline{HM}$.

2.3.2 Expression de l'accélération de Coriolis

Dans le cas d'une translation, on remarque de plus que l'accélération de Coriolis est nulle car les vecteurs de bases sont fixes.

On considère donc une rotation de vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$. Il vient

$$\vec{a}_c = 2(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) = 2\vec{\Omega} \wedge (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

avec \vec{v}_r la vitesse relative.

Ces résultats se retrouvent directement du mouvement d'un point ayant un mouvement radial dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire ω . Considérons que le référentiel tournant est décrit par le repère polaire, le vecteur position dans ce référentiel est donc simplement $\overline{OM} = r\vec{e}_r$. Le point coïncident décrit donc un mouvement circulaire (uniforme ou non). On a ensuite

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\theta$$

soit $\vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r$ et $\vec{v}_e = r\omega\vec{e}_\theta$. Ensuite, on a

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + (r\dot{\omega}\vec{e}_\theta - r\omega^2\vec{e}_r) + 2\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$$

soit $\vec{a}_r = \ddot{r}\vec{e}_r$, $\vec{a}_e = r\dot{\omega}\vec{e}_\theta - r\omega^2\vec{e}_r$ et $\vec{a}_c = 2\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$. Ces relations permettent de retrouver rapidement les expressions des accélérations dans le cas d'une rotation.

2.3.3 Conclusion

Dans le cas quelconque, la translation et la rotation sont possibles.

Propriété. La loi de composition des accélérations indique que l'accélération \vec{a} de la particule dans le référentiel \mathcal{R} est donnée par

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où on note

- ▷ \vec{a}_r l'accélération relative de la particule dans \mathcal{R}_1 ;
- ▷ \vec{a}_e l'accélération d'entraînement de la particule, soit l'accélération du point coïncident du référentiel \mathcal{R}_1 dans le référentiel \mathcal{R} ;
- ▷ \vec{a}_c l'accélération de Coriolis donnée par la relation

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où on note $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané du référentiel \mathcal{R}_1 dans le référentiel \mathcal{R} et \vec{v}_r la vitesse relative de la particule étudiée dans le référentiel \mathcal{R}_1 .

3 Dynamique en référentiel non galiléen

3.1 Seconde loi de Newton en référentiel non galiléen

Soit \mathcal{R}_g un référentiel galiléen et \mathcal{R}_1 un référentiel quelconque dont le mouvement par rapport à \mathcal{R}_g est connu. Soit M un point matériel de masse m .

Le seconde loi de Newton appliquée à M dans \mathcal{R}_g s'écrit

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{F}_k .$$

L'accélération de la masse peut alors s'écrire à l'aide de la composition des accélérations

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}_1} + \vec{a}_e + \vec{a}_c .$$

On en déduit la relation

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum \vec{F}_k - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c .$$

Propriété. Dans un référentiel \mathcal{R}_1 en mouvement quelconque connu par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la seconde loi de Newton s'écrit

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_1} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} , \quad (3.1)$$

avec

- ▷ $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e(M)$ la pseudo-force d'inertie d'entraînement ;
- ▷ $\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c(M)$ la pseudo-force d'inertie de Coriolis.

Les termes présents dans l'expression de la pseudo-force dépendent du mouvement relatif du référentiel \mathcal{R}_1 par rapport au référentiel \mathcal{R}_g .

Exemple 3 : Un voiture roule en ligne droite. Elle freine d'un coup, comment se matérialisent les forces d'inertie ?

Exemple 4 : Dans une machine à laver qui tourne à vitesse constante, comment se matérialisent les forces d'inertie ? Justifier le terme de « force centrifuge ».

3.1.1 Théorème du moment cinétique

On déduit directement de ce qui précède le théorème du moment cinétique par rapport à un point O fixe d'un point matériel M de masse m en mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_1 quelconque est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ic}) .$$

3.2 Aspects énergétiques

3.2.1 Cas de la pseudo-force d'inertie de Coriolis

Dans \mathcal{R}_1 non galiléen, la puissance de \vec{F}_{ic} est :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic})_{\mathcal{R}_1} = -2m \underbrace{(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}_1})}_{\text{orthogonal à } \vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_1} .$$

On a alors $\mathcal{P}(\vec{F}_{ic})_{\mathcal{R}_1} = 0$: la pseudo-force d'inertie de Coriolis ne travaille donc pas.

3.2.2 Cas de la pseudo-force d'inertie d'entraînement

La pseudo-force d'inertie d'entraînement n'est généralement pas conservative. On retiendra néanmoins que \vec{F}_{ie} est conservative dans les deux cas suivants.

Cas de la translation rectiligne uniformément accélérée : La force \vec{F}_{ie} est conservative. En effet, en coordonnées cartésiennes (quitte à opérer une rotation du repère), on a

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_0 = -ma_0 \vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \vec{e}_x$$

soit l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_{p,ie} = ma_0x + \text{Cte}.$$

Cas de la rotation uniforme : La force \vec{F}_{ie} est conservative. En effet, en coordonnées cylindriques, on a

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}(t) = m\omega^2 r \vec{e}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r$$

soit l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 + \text{Cte}.$$

3.2.3 Théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique

Le théorème de la puissance cinétique dans \mathcal{R}_1 non galiléen s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}_1} = \sum_k P(\vec{F}_k)_{\mathcal{R}_1} + P(\vec{F}_{ie})_{\mathcal{R}_1}.$$

En multipliant ce théorème de la puissance cinétique par dt , on obtient le théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle :

$$d\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}_1} = \sum_k \delta W(\vec{F}_k)_{\mathcal{R}_1} + \delta W(\vec{F}_{ie})_{\mathcal{R}_1}.$$

Et en intégrant sur un chemin fini entre A et B :

$$\Delta \mathcal{E}_{c,\mathcal{R}_1} = \mathcal{E}_c(B)_{\mathcal{R}_1} - \mathcal{E}_c(A)_{\mathcal{R}_1} = \sum_k W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_k)_{\mathcal{R}_1} + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ie})_{\mathcal{R}_1}.$$

Séparons les forces exercées sur le système M en forces conservatives de résultante \vec{F}_c et forces non conservatives de résultante \vec{F}_{nc} .

***** Attention !** En fonction des cas rencontrés, la pseudo-force d'inertie d'entraînement sera associée aux forces conservatives ou non conservatives.

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit

$$\frac{d\mathcal{E}_m(M)_{\mathcal{R}_1}}{dt} = P(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}_1}.$$

On a également, en multipliant par dt

$$d\mathcal{E}_m(M)_{\mathcal{R}_1} = \delta W(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}_1},$$

et en intégrant sur une transformation finie

$$\Delta \mathcal{E}_m(M)_{\mathcal{R}_1} = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}_1}.$$

3.3 Caractère non galiléen du référentiel terrestre

3.3.1 Rappel : la première loi de Newton - le principe d'inertie

Définition. Il existe des référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** dans lesquels un point matériel M isolé, soumis à aucune action mécanique, est

- ▷ soit au repos ;
- ▷ soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Considérons une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Considérons un autre référentiel en translation uniforme par rapport à ce référentiel. Dans ce cas, la particule est toujours isolée et soumise à aucune action mécanique et son mouvement est toujours rectiligne uniforme. On peut par exemple penser au référentiel du sol et à celui lié à une voiture en mouvement rectiligne uniforme.

Propriété. Tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

En réalité, les référentiels rigoureusement galiléens n'existent pas. Mais on peut en considérer certains comme approximativement galiléens.

3.3.2 Les référentiels relatifs à la Terre

Les référentiels les plus utiles sont définis par une horloge placée sur Terre et par un repère particulier. Ce sont

- ▷ le référentiel **héliocentrique** ou de **Copernic** \mathcal{R}_S qui a pour origine le centre de masse du système solaire, soit approximativement le centre du Soleil et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel. Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit une durée inférieure à plusieurs années ;
- ▷ le référentiel **géocentrique** \mathcal{R}_G qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel. Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit une durée courte devant une année ;
- ▷ le référentiel **terrestre** \mathcal{R}_T , ou référentiel du **laboratoire**, qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont fixes par rapport à la Terre. Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'une rotation significative de la Terre, soit une durée courte devant une journée. C'est le référentiel dans lequel nous étudierons la plupart des systèmes en CPGE.

La figure 3 schématise les différents référentiels.

Remarque : La galaxie étant en rotation autour de son centre, \mathcal{R}_S n'est pas galiléen dans l'absolu. En revanche, comme sa période de rotation vaut $T = 226$ millions d'années, on le considèrera comme galiléen pour les expériences courtes devant T .

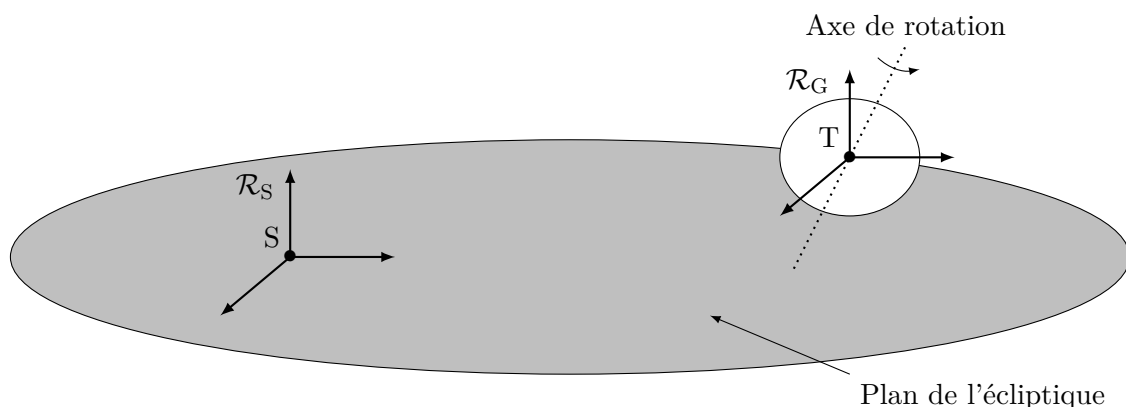


Fig. 3 – Les différents référentiels.

3.3.3 Le référentiel terrestre

Le référentiel terrestre \mathcal{R}_T a pour origine le centre de masse T de la Terre et ses axes suivent le mouvement de révolution de la Terre autour de son axe.

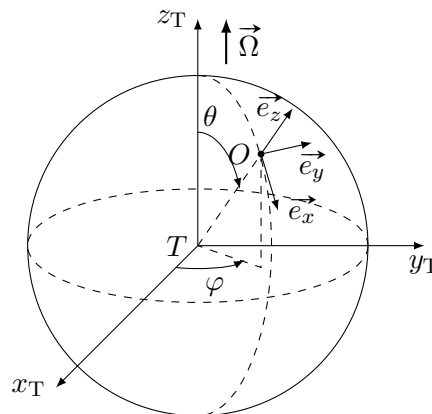


Fig. 4 – Référentiel terrestre local (O, x, y, z) . z_T est l'axe des pôles (Sud-Nord), les axes x_T et y_T suivent la rotation de la Terre. x_T sert de référence pour la longitude tandis que (T, x_T, z_T) sert de référence pour la latitude.

Pour l'étude du mouvement d'un point M à la surface de la Terre, on utilise un référentiel terrestre local $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, centré en un point O fixe de la surface. L'axe \vec{u}_z est généralement choisi comme verticale du lieu.

Le point O est repéré à la surface de la Terre par :

- ▷ sa latitude λ : angle par rapport au plan de l'équateur. On a $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et la relation avec la colatitude des coordonnées sphériques est : $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$.
- ▷ sa longitude φ : angle par rapport à un méridien de référence. On a $\varphi \in [0; 2\pi[$ en physique mais $\varphi \in [-\pi; \pi[$ en cartographie.

\mathcal{R}_T étant en rotation (supposée uniforme) autour de l'axe (Tz_T) dans \mathcal{R}_g , il n'est pas galiléen.

Vitesse angulaire Ω_T de rotation instantanée de \mathcal{R}_T par rapport à \mathcal{R}_g Il faut distinguer le jour solaire moyen (durée T_m entre deux passages successifs du soleil au zénith) et le jour sidéral (durée T_s mise par la Terre pour faire un tour complet).

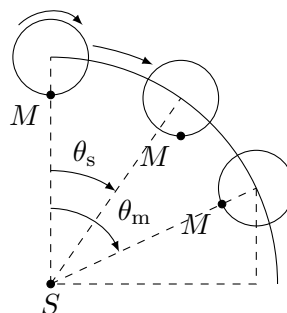


Fig. 5 – Illustration de la différence entre jour sidéral et jour solaire moyen. L'angle θ_s - associé au jour sidéral - parcouru par la Terre sur son orbite pour faire un tour de 2π sur elle-même est plus petit que l'angle θ_m - associé au jour solaire moyen - nécessaire pour que le point M à la surface de la Terre se retrouve face au Soleil.

Une journée sidérale dure :

$$T_s = 86\,164\text{ s} = 23\text{ h } 56\text{ min } 4\text{ s.}$$

La vitesse angulaire est alors :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T_s} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

Remarque : Si on calcule la vitesse angulaire Ω_T avec la durée d'un jour solaire au lieu d'un jour sidéral, on trouve :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T_m} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

On pourra donc utiliser :

$$\Omega_T = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s,}$$

et retrouver ce résultat rapidement avec la durée d'un jour solaire moyen.

3.4 Dynamique dans le référentiel terrestre

3.4.1 Seconde loi de Newton

Considérons une particule située en M de masse m étudiée dans le référentiel terrestre. Celui-ci n'est pas supposé galiléen. Le référentiel de référence est le **référentiel géocentrique**, supposé galiléen. Le référentiel terrestre est en **rotation instantanée** par rapport au référentiel géocentrique.

La seconde loi de Newton indique, dans le référentiel terrestre,

$$m\vec{a} = \vec{f} + m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad (3.2)$$

où \vec{f} modélise l'ensemble des forces non gravitationnelles subies par le système et \vec{g} l'accélération de pesanteur terrestre.

3.4.2 La direction du fil à plomb

La force d'inertie d'entraînement est une force statique, indépendante de la vitesse de la particule. Elle est donc subie en permanence par tout système sur Terre. Son expression dans le bilan des forces (3.2) est $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 HM \vec{e}$ avec HM la distance entre l'axe de rotation et le système et \vec{e} le vecteur radial correspondant à un mouvement circulaire en ce point. Les notations sont représentées figure 6.

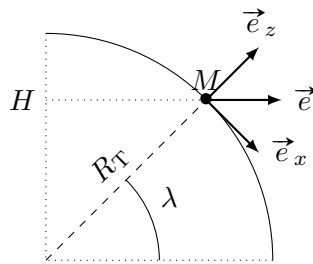


Fig. 6 – Schéma pour définir la direction du fil à plomb, λ est la latitude.

On constate que $HM = R_T \cos \lambda$ et on en déduit

$$\vec{g}_{\text{eff}} = -g\vec{e}_z - \Omega^2 HM \vec{e} = (-g + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) \vec{e}_z + \Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda \vec{e}_x .$$

Ce vecteur \vec{g}_{eff} représente la gravité effective, ou « vulgaire », ressentie par une particule. Elle n'est pas dirigée vers le centre de la Terre et dépend de la latitude. Un fil à plomb, c'est-à-dire un fil ayant une masse linéique non négligeable, est dirigé selon la direction de ce vecteur \vec{g}_{eff} .

Toutefois, il s'agit bien d'une faible correction de la gravité. En effet, on a $\Omega^2 R_T \approx 0.034 \text{ m/s}^2$, à comparer à $g = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2$.

3.4.3 Un effet de la force de Coriolis : la déviation vers l'est

Exprimons la force de Coriolis, il vient

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} .$$

Cette expression est complexe à analyser dans le cas d'un mouvement quelconque.

Pour simplifier, étudions le problème d'une particule en chute libre. Comparons cette force à la gravité, il vient

$$\frac{mg}{2m\Omega_T v} = \frac{g}{2\Omega_T v} = \frac{70 \times 10^3}{v}.$$

Ainsi, pour des vitesses très inférieures à 70 km/s, la force de Coriolis est négligeable devant la gravité. Ce sera évidemment très souvent le cas.

Ainsi, la force de Coriolis peut être vue uniquement comme une correction à la gravité. Supposons donc que la vitesse $\vec{v} = -gt\vec{e}_z$, en reprenant les notations de la figure 4, correspond bien, en première approximation, la vitesse d'une particule en chute libre.

Application 2 : Pour se convaincre du raisonnement, poser les équations du mouvement sans approximation, les résoudre puis faire un développement limité pour retrouver les résultats suivants.

Dans ce cas, la force Coriolis s'exprime, à nouveau avec les notations de la figure 6, par

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = 2gtm\Omega_T \vec{e}_{z_T} \wedge \vec{e}_z = 2gtm\Omega_T \cos \lambda \vec{e}_y.$$

Cette force est dirigée selon \vec{e}_y , soit vers l'est. En écrivant la seconde loi de Newton et intégrant deux fois, il vient une déviation

$$\Delta y = \frac{1}{3}\Omega_T \cos \lambda gt^3.$$

Dans une expérience en 1831 à Freyberg ($\lambda = 51^\circ$), Ferdinand Reich a observé une chute dans un puits de mine de profondeur $h = 158$ m. Soit un temps de chute $t = \sqrt{2h/g} = 5.7$ s et une déviation théorique de l'ordre de 30 mm, très proche de la déviation observée à l'époque de 28 mm (bien que l'incertitude des mesures de l'époque soient largement supérieure à la déviation elle-même, voir [cet article](#)¹). Ces résultats sont proches mais pas nécessairement compatibles, en particulier dû au fait que nous avons négligé les frottements de l'air et mis en place une approche perturbative pour résoudre l'équation (c'est-à-dire que nous avons raisonné par approximation successives).

On retiendra

- ▷ qu'une chute de m sera déviée vers l'Est, quel que soit l'hémisphère,
- ▷ qu'un mouvement horizontal sera dévié vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud.

La force de Coriolis ne s'applique qu'à des particules déjà en mouvement. Elle joue un rôle clé dans plusieurs expériences, notamment celle du pendule de Foucault². Toutefois, son effet est très souvent négligeable pour des petits systèmes. Cette force a toutefois une manifestation macroscopique importante, à savoir dans l'étude des circulations des vents et des courants marins autour de dépression ou surpression locales (les « cyclone » et « anti-cyclone » météorologiques). Selon l'hémisphère, le sens de rotation de ces phénomènes est imposé par la force de Coriolis³.

3.4.4 Force de marée

Considérons une particule située en M de masse m étudiée dans le référentiel géocentrique. Celui-ci n'est pas supposé galiléen. Il faut donc tenir compte des forces d'inertie. De plus, on tient compte ici des champs gravitationnels créés par les différents astres du système solaire (Lune, Soleil, autres planètes...) représentés par le vecteur $\vec{\alpha}(M)$. Le référentiel de référence est le **référentiel héliocentrique**, dans lequel le référentiel géocentrique est en translation instantanée.

La seconde loi de Newton indique, dans le référentiel terrestre,

$$m\vec{a} = \vec{f} + m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + m\vec{\alpha}(M) \quad (3.3)$$

où \vec{f} modélise l'ensemble des forces non gravitationnelles subies par le système et \vec{g} l'accélération de pesanteur terrestre.

1. <https://www.refletsdelaphysique.fr/articles/refdp/pdf/2009/05/refdp200917p18.pdf>

2. Cette expérience est toujours visible au Panthéon à Paris.

3. L'effet de la force de Coriolis n'est visible que pour de très larges étendues de fluides. La force de Coriolis est totalement négligeable dans la circulation d'un fluide s'écoulant dans un lavabo.

L'accélération d'entraînement dans le référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique est

$$\vec{a}_e = \vec{a}_G$$

avec \vec{a}_G l'accélération du point concident, soit l'accélération du centre de masse G de la Terre dans le référentiel héliocentrique car le référentiel géocentrique est en translation instantanée par rapport à celui-ci. Il n'y a pas de rotation donc la force d'inertie de Coriolis est nulle.

Dans le bilan des forces (3.3), il reste deux termes que nous n'avons pas encore étudié à savoir $\vec{F}_{ie} + m\vec{\alpha}(M) = -m\vec{a}_G + m\vec{\alpha}(M)$. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique dans ce référentiel et il vient

$$M_T \vec{a}_G = M_T \vec{\alpha}(G) .$$

On en déduit que le terme restant dans (3.2) s'écrit

$$\vec{F}_{marée} = m(\vec{\alpha}(M) - \vec{\alpha}(G))$$

que l'on appellera **force de marée**.

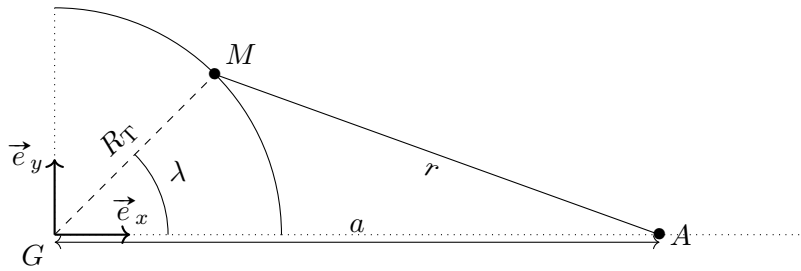


Fig. 7 – Visualisation des notations pour l'expression des forces de marée.

Pour exprimer la force de marée, utilisons les notations de la figure 7, il vient

$$\vec{F}_{marée} = m\mathcal{G}M_{astre} \left(\frac{\overrightarrow{MA}}{r^3} - \frac{\overrightarrow{GA}}{a^3} \right)$$

avec

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA} = -R_T(\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_y) + a \vec{e}_x$$

On se situe sur des distances astronomiques, donc $R_T \ll a$, ainsi, en ne gardant que le premier ordre en a/R_T , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{\|\overrightarrow{MA}\|^3} = ((R_T \sin \lambda)^2 + (a - R_T \cos \lambda)^2)^{-3/2} ; \\ &\approx \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{2R_T}{a} \cos \lambda + \frac{R_T^2}{a^2} \right)^{-3/2} ; \\ &\approx \frac{1}{a^3} \left(1 + 3\frac{R_T}{a} \cos \lambda \right) . \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{marée} &= m \frac{\mathcal{G}M_{astre}}{a^3} \left(\overrightarrow{MA} \left(1 + 3\frac{R_T}{a} \cos \lambda \right) - \overrightarrow{GA} \right) ; \\ &= m \frac{\mathcal{G}M_{astre}}{a^3} \left([-R_T(\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_y) + a \vec{e}_x] \left(1 + 3\frac{R_T}{a} \cos \lambda \right) - a \vec{e}_x \right) ; \\ &\approx m \frac{\mathcal{G}M_{astre}}{a^3} (-R_T(\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_y) + 3R_T \cos \lambda \vec{e}_x) = m \frac{\mathcal{G}M_{astre}R_T}{a^3} (2 \cos \lambda \vec{e}_x - \sin \lambda \vec{e}_y) . \end{aligned}$$

Il est intéressant de représenter le champ de force de marée aux quatre points indiqués sur la figure 8.

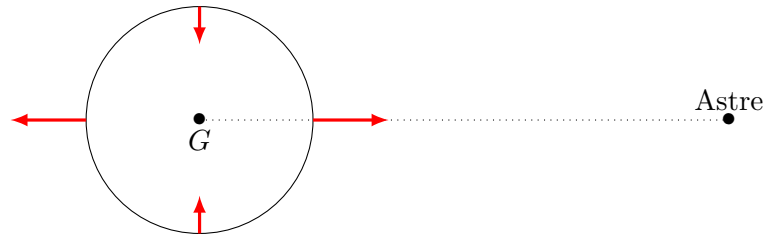


Fig. 8 – Visualisation de la direction de la force de marée en des points particuliers.

Le champ de force de marée tend à « écarteler » les points situés à la surface de la Terre sur la ligne AG : c’est un aspect caractéristique du phénomène. Ainsi, la force de marée est identique en deux points opposés du globe, ce qui explique le fait qu’il y a environ deux marées par jour.

Cherchons l’ordre de grandeur du phénomène. On peut écrire $F_{\text{marée}} = mg_{\text{marée}}$ avec $g_{\text{marée}} = \frac{\mathcal{G}M_{\text{astre}}R_T}{a^3}$. On peut comparer ce terme à la gravité terrestre g , on trouve pour $\left(\frac{g_{\text{marée}}}{g}\right)_{\text{Lune}} = 5.67 \times 10^{-8}$ et $\left(\frac{g_{\text{marée}}}{g}\right)_{\text{Soleil}} = 2.57 \times 10^{-8}$, les termes des autres astres étant négligeables devant ces deux là. On constate donc que ces termes sont très faibles et du même ordre de grandeur, même si le terme de la Lune domine.

Ces termes sont très faibles mais, sur la très grande masse de fluide océanique, leur effet est mesurable à notre échelle. Les effets combinés ou opposés de la Lune et du Soleil explique en partie les variations d’amplitude entre les différentes marées.

L’effet astronomique est le moteur principal de l’étude des marées. Toutefois, il est insuffisant pour expliquer les amplitudes de certaines marées, il est alors nécessaire de prendre en compte l’effet de la géographie et des effets ondulatoires pouvant conduire à des résonances.

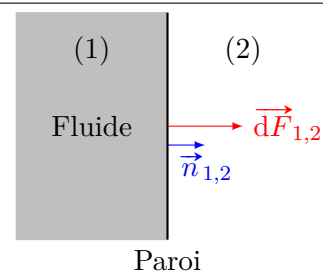
4 Complément : statique des fluides

4.1 Relation fondamentale de la statique des fluides

4.1.1 Les forces de pression

Définition. Si dS est une surface infinitésimale au sein d’un fluide où règne une pression P , séparant un élément (1) d’un élément (2) du fluide, et $\vec{n}_{1,2}$ est le vecteur unitaire orthogonal à dS dirigé de (1) vers (2), alors la force de pression $\vec{dF}_{1,2}$ exercée au niveau de dS par (1) sur (2) est :

$$\vec{dF}_{1,2} = PdS\vec{n}_{1,2} .$$



On admet que la pression ne dépend pas de l’orientation de la surface infinitésimale choisie et dépend uniquement du point autour duquel la surface dS est considérée.

Si cette expression se généralise simplement pour les surfaces planes et dans le cas où le champ de pression est uniforme, son calcul devient plus complexe dans les cas où la pression n’est pas la même en tout point de la surface considérée, ou lorsque la surface n’est pas plane.

Dans ces cas-là, on découpe la surface en portions élémentaires, on peut considérer chacune comme plane, et sur laquelle la pression est uniforme. On peut alors appliquer la formule précédente, puis sommer ces contributions élémentaires sur l’ensemble de la surface.

Définition. La force de pression exercée par un fluide où règne un champ de pression P sur une paroi (S) est donnée par

$$\vec{F}_P = \iint_{(S)} P(M) \vec{n}(M) dS$$

où

- ▷ $\iint_{(S)}$ représente une intégrale double, ayant lieu sur un domaine à deux dimensions (c'est à dire sur une surface),
- ▷ M représente les différents points de la surface sur laquelle la force est exercée,
- ▷ $P(M)$ est la pression dans le fluide au niveau du point M
- ▷ $\vec{n}(M)$ est le vecteur orthogonal à la surface (S) au niveau du point M , dirigé du fluide exerçant la force vers la surface.
- ▷ dS est l'élément infinitésimal de surface.

L'intégration d'une fonction à deux variables est une opération mathématiquement plus compliquée que les intégrales à une dimension étudiées jusque là. Cependant, dans une très grande majorité des cas rencontrés en physique, divers outils permettent sa simplification, notamment par des calculs d'intégrales simples.

4.1.2 Bilan des forces de pression sur un volume mésoscopique

Ce calcul se base sur une étude de systèmes à l'échelle mésoscopique. Elle est nécessaire pour décrire des propriétés moyennes d'un fluide (car les propriétés de chaque particule élémentaire du fluide comportent une part inobservable, décrite comme aléatoire), tout en gardant une approche locale. On pourra ainsi considérer à l'échelle macroscopique que les grandeurs intensives sont définies en chaque « point » du fluide (en fait dans une zone de taille mésoscopique autour du point considéré).

On considère en coordonnées cartésiennes un parallélépipède de dimensions $dV = dx \times dy \times dz$.

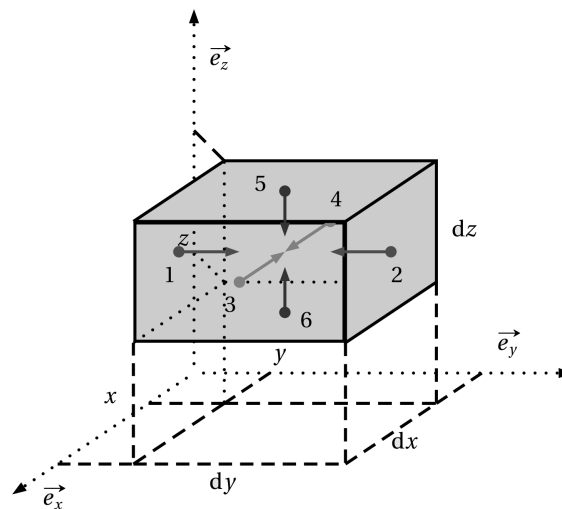


Fig. 9 – Système mésoscopique de fluide.

Considérons les forces de pression par paires, en commençant par les forces 1 et 2. Le système étant défini à l'échelle mésoscopique, on peut considérer la pression uniforme sur chacune de ses faces. Ainsi, sur ces deux faces, la pression ne dépend pas de x et z . On a alors en évaluant la pression au centre des faces :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 &= P(x, y, z) dx dz \vec{e}_y - P(x, y + dy, z) dx dz \vec{e}_y ; \\ &= - \frac{\partial P}{\partial y} (x, y, z) dx dy dz \vec{e}_y . \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4 = - \frac{\partial P}{\partial x} (x, y, z) dx dy dz \vec{e}_x \quad \text{et} \quad d\vec{F}_5 + d\vec{F}_6 = - \frac{\partial P}{\partial z} (x, y, z) dx dy dz \vec{e}_z .$$

On obtient alors

$$\overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} + \overrightarrow{dF_3} + \overrightarrow{dF_4} + \overrightarrow{dF_5} + \overrightarrow{dF_6} = - \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \vec{e}_z \right) dx dy dz .$$

On constate que l'ensemble des forces de pression s'écrit donc $-(\overrightarrow{\text{grad}} P)dV$.

4.1.3 Relation fondamentale de la statique des fluides

Faisons maintenant un bilan des forces globale s'appliquant sur le volume mésoscopique de fluide. Les forces exercées sur ce système sont les 6 forces de pression numérotées sur le schéma de la figure 9, auxquelles s'ajoutent d'éventuelles forces supplémentaires, de résultante $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f_V}dV$. On note ainsi $\overrightarrow{f_V}$ l'ensemble des champs de force volumiques s'appliquant sur le volume mésoscopique.

Définition. Si une force \overrightarrow{F} s'applique sur un système de volume V , et si \overrightarrow{F} est proportionnelle à V , alors on peut définir la **force volumique** $\overrightarrow{f_V}$ associée :

$$\overrightarrow{f_V} = \frac{\overrightarrow{F}}{V}$$

La force volumique est une grandeur intensive.

Exemple 5 : Les forces volumiques sont des actions à distance, dont les exemples les plus courants sont le poids ($\overrightarrow{P} = \rho \overrightarrow{g}$ pour un système de masse volumique ρ plongé dans \overrightarrow{g}) et la force de Lorentz ($\overrightarrow{f_L} = \rho_e(\overrightarrow{E} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B})$ pour un corps de densité volumique de charge ρ_e se déplaçant à \vec{v} dans \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B}).

On applique la seconde loi de Newton au volume mésoscopique au repos, soit d'accélération nulle. L'équilibre de ce système se traduit par

$$-\overrightarrow{\text{grad}} P dV + \overrightarrow{f_V}dV = \vec{0} .$$

Théorème. Au sein d'un fluide sur lequel s'exerce des champs de forces volumiques dont la résultante en un point M est $\overrightarrow{f_V}(M)$, la pression vérifie la **relation fondamentale de la statique des fluides**

$$\overrightarrow{\text{grad}} P(M) = \overrightarrow{f_V}(M) .$$

Définition. On nomme équivalent volumique des forces de pressions la grandeur

$$\overrightarrow{f_P} = -\overrightarrow{\text{grad}} P .$$

En effet, bien que la force de pression ne soit pas une force volumique (comme les autres actions de contact par exemples celles de viscosité, étudiées en seconde année, ou les frottements solides), on peut obtenir cet équivalent en mettant la relation fondamentale de la statique des fluides sous la forme $-\overrightarrow{\text{grad}} P(M) + \overrightarrow{f_V}(M) = 0$. On remarque alors que $-\overrightarrow{\text{grad}} P(M)$ a un rôle équivalent à une force volumique.

Application 3 : Calculer le champ de pression $P(z)$ dans l'eau (masse volumique constante) et dans l'air assimilée à un gaz parfait isotherme.

4.1.4 Équation de la surface libre

La surface libre d'un fluide est, par définition, à la pression atmosphérique constante. L'équation de la surface libre est donc donnée par une la courbe qui est en permanence orthogonale aux gradient des forces de pression.

Si on note $\overrightarrow{d\ell}$ le vecteur élémentaire décrivant la surface libre, il vient donc $\overrightarrow{d\ell} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P(M) = 0$ soit $\overrightarrow{d\ell} \cdot \overrightarrow{f_V}(M) = 0$. Cette relation permet de déterminer l'équation de la surface libre.

4.2 Théorème d'Archimède

On souhaite maintenant calculer la résultante des forces de pression s'appliquant sur un solide donné. Par définition, on a vu que

$$\vec{F}_P = \iint_{(S)} P(M) \vec{n}(M) dS.$$

Il s'agit donc maintenant de calculer explicitement cette grandeur sur des surfaces diverses.

4.2.1 Démonstration de la formule du gradient

Soit un vecteur \vec{u} quelconque.

Calculons le flux à travers une surface fermée de $f\vec{u}$ avec f un champ scalaire. On a donc

$$\oiint_S f\vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(f\vec{u}) dV$$

par application de la formule de Green-Ostrogradsky, V étant le volume interne à la surface fermée S .

Par ailleurs, on peut calculer

$$\operatorname{div}(f\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x}(fu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fu_z) = \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y + \frac{\partial f}{\partial z}u_z = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \cdot \vec{u}$$

où on a noté $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$, ces composantes étant constantes.

Il vient donc

$$\oiint_S f\vec{u} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(f\vec{u}) dV = \iiint_V (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \cdot \vec{u} dV$$

ou encore, le vecteur \vec{u} étant constant,

$$\left(\oiint_S f d\vec{S} \right) \cdot \vec{u} = \left(\iiint_V (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) dV \right) \cdot \vec{u}.$$

Or cette relation est vraie pour tout vecteur \vec{u} , ce qui implique la formule du gradient

$$\oiint_S f d\vec{S} = \iiint_V (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) dV. \quad (4.1)$$

4.2.2 Poussée d'Archimède

Définition. La résultante des forces de pression sur un corps immergé dans un fluide est appelée **poussée d'Archimède**.

Il vient donc

$$\vec{\Pi} = \oiint_S P dS \vec{n}.$$

Cette intégrale est dans ce cas fermée car le corps est totalement immergé dans le fluide. On peut appliquer la formule du gradient (4.1) démontrée dans le paragraphe 4.2.1, soit

$$\vec{\Pi} = \oiint_S P dS \vec{n} = - \iiint_V (\overrightarrow{\operatorname{grad}} P) dV.$$

Le signe $-$ provient du fait que dans la formule du gradient, les vecteurs infinitésimaux $d\vec{S}$ sont sortants conformément à la formule de Green-Ostrogradski.

On peut alors appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique dans le cas du champ de pesanteur uniforme, soit

$$\vec{\Pi} = - \iiint_V (\overrightarrow{\operatorname{grad}} P) dV = - \iiint_V \vec{f}_V(M) dV = -\rho_f \vec{g} \iiint_V dV.$$

Propriété. Soit un corps de volume V immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f . La poussée d'Archimède est égale à l'opposé des forces volumiques subies par le fluide déplacé.

Dans le cas où seul le poids s'applique, la poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé et s'applique sur le centre de gravité du volume.

$$\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g} .$$

Les forces volumiques peuvent prendre en compte les éventuelles forces non galiléennes.

En toute rigueur, cette expression n'est vraie que pour les fluides au repos. Elle porte donc le nom de pression statique. En cas de fluide en écoulement, il faut utiliser la relation de Bernoulli. Toutefois, en cas de mouvement suffisamment lent, cette expression pourra être supposée valide.