

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Les signaux périodiques et le régime forcé</b>	<b>1</b>
1.1	Définitions . . . . .	1
1.2	La notation complexe . . . . .	2
1.3	Le régime forcé en électronique et impédances . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Les systèmes linéaires</b>	<b>3</b>
2.1	Introduction aux systèmes linéaires . . . . .	3
2.2	Les systèmes linéaires à invariance temporelle . . . . .	3
2.3	Les systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants . . . . .	4
2.4	La fonction de transfert . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Application au filtrage linéaire</b>	<b>5</b>
3.1	Le théorème de Fourier . . . . .	5
3.2	Utilisation de la fonction de transfert . . . . .	5
3.3	Associations de filtres . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Compléments</b>	<b>9</b>
4.1	Le théorème de Millmann . . . . .	9
4.2	L'amplificateur linéaire intégré (ALI) . . . . .	10
4.3	Exemples de montages à ALI supposé idéal . . . . .	11

Ce chapitre de révision a pour but de rappeler quelques notions sur les filtres.

## 1 Les signaux périodiques et le régime forcé

### 1.1 Définitions

**Définition.** Un signal  $s(t)$  est **périodique** si et seulement si il existe une **période**  $T$  minimale telle que, pour tout instant  $t$ , on a

$$s(t + T) = s(t) .$$

On définit la **fréquence**  $f$  d'un signal par la relation  $f = \frac{1}{T}$ . On définit de plus la **pulsation**  $\omega$  d'un signal par  $\omega = 2\pi f$ .

On définit enfin la **valeur moyenne** du signal périodique  $s(t)$  de période  $T$  par la relation

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt .$$

Par exemple, le signal  $s(t) = a \sin \omega t$  est de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Il est de plus de valeur moyenne nulle.

**Définition.** On définit la **valeur efficace** est définie comme la valeur constante qui fournirait la même puissance. Mathématiquement, elle se définit sur un signal périodique  $s(t)$  de période  $T$  par la relation

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} .$$

On peut montrer pour un signal sinusoïdal  $s(t) = a \sin \omega t$  que  $s_{\text{eff}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

La grandeur physique pertinente n'est pas l'amplitude des signaux, mais leur énergie et la valeur moyenne de l'énergie. Or l'énergie dépend des signaux mis au carré. Ainsi, un signal de valeur moyenne nulle transporte une énergie proportionnelle à  $s_{\text{eff}}^2$ .

## 1.2 La notation complexe

**Définition.** Lors de l'étude des signaux, on note  $j$  le nombre complexe tel que

$$j^2 = -1 .$$

On utilise cette notation en électronique pour ne pas confondre ce nombre complexe avec l'intensité du courant électrique, noté généralement  $i$ .

**Propriété.** Prenons la fonction réelle  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ . L'application de la formule mathématique d'Euler implique que  $u(t)$  est la partie réelle d'une exponentielle complexe soit

$$U \cos(\omega t + \varphi) = \Re \left( U e^{j(\omega t + \varphi)} \right) .$$

En s'appuyant sur la propriété précédente, plutôt que de manipuler des fonctions sinusoïdales, on utilisera toujours la forme exponentielle complexe, plus simple à manipuler grâce à la propriété de l'exponentielle  $e^a e^b = e^{a+b}$ .

**Définition.** Soit le signal physique  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ . Sa notation complexe est  $\underline{U}(t) = U e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ . On note l'**amplitude complexe** du signal  $u(t)$   $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ .

À partir de l'amplitude complexe, on déduit

▷ l'**amplitude réelle** du signal  $U = |\underline{U}|$ ; ▷ la **phase** du signal  $\varphi = \arg \underline{U}$ .

Le soulignement permet de ne pas oublier que l'on manipule des grandeurs complexes.

**Remarque :** Si le signal est un sinus au lieu d'un cosinus, cela rajoute un déphasage de  $\pi/2$  dans l'exponentielle qui ne change rien au raisonnement global.

### 1.2.1 Dérivations et intégrations en notations complexes

Calculons la dérivée du signal complexe  $\underline{U}(t)$ . On a

$$\frac{d\underline{U}}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left( \underline{U} e^{j\omega t} \right) = \underline{U} \frac{de^{j\omega t}}{dt} = \underline{U} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{U}(t) .$$

**Propriété.** La dérivation temporelle du signal complexe  $\underline{U}(t)$  correspond à une multiplication par  $j\omega$ .

Cette propriété permet de simplifier grandement tous les calculs de dérivée, et même d'intégrales.

## 1.3 Le régime forcé en électronique et impédances

On appelle **régime sinusoïdal forcé** un régime physique pour lequel un système est soumis à une excitation purement sinusoïdale. Il a été montré sur les systèmes linéaires électriques et mécaniques étudiés en première année que ce régime impose que toutes les grandeurs physiques (courants, tensions, positions, vitesses...) sont aussi sinusoïdales de même pulsation que l'excitation. On peut donc entièrement traiter les problèmes forcés en notation complexe à l'aide des impédances.

**Définition.** On définit l'**impédance**  $\underline{Z}$  d'un dipôle comme le rapport entre la tension  $\underline{U}(t)$  et l'intensité du courant  $\underline{i}(t)$  en convention récepteur, soit la **loi d'Ohm en régime sinusoïdal forcé**  $\underline{U}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$ . L'impédance électrique  $\underline{Z}$  a la dimension d'une résistance, l'unité de son module est l'ohm.

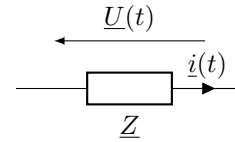


Fig. 1 – Une impédance en convention récepteur.

On rappelle les impédances des dipôles usuels :  $\underline{Z}_R = R$  pour une résistance  $R$ ,  $\underline{Z}_L = jL\omega$  pour une inductance  $L$  et  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$  pour une capacité  $C$ .

## 2 Les systèmes linéaires

### 2.1 Introduction aux systèmes linéaires

Nous considérons ici de façon générale les systèmes physiques et leurs réponses à une excitation. Schématiquement, on note :



Prenons par exemple le plantage d'un clou dans un mur. Le système étudié est le clou, tandis que l'excitation est l'action du marteau, et enfin la réponse la profondeur d'enfoncement du clou.

De façon générale, pour décrire les phénomènes physiques, il faut les modéliser. Cela passe d'abord par une formalisation, souvent mathématique et sous certaines hypothèses, de la réponse du système, puis par une vérification des prédictions du modèle au regard de l'expérience à une échelle donnée.

Dans l'exemple du clou, on suppose celui-ci incompressible et non déformable. Sur une échelle de l'ordre du centimètre avec des coups de marteau pas trop violents, c'est une bonne description. Si l'on regarde à l'échelle nanométrique, chaque coup de marteau déforme le clou. De même, un coup trop violent risque de le déformer.

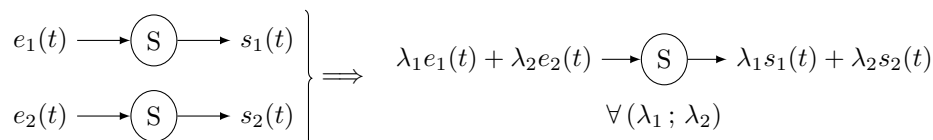
### 2.2 Les systèmes linéaires à invariance temporelle

En première approximation, lorsque c'est possible, on choisit une modélisation linéaire des systèmes.

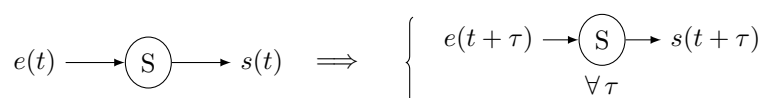
**⚠️ Attention !** Il ne faut toutefois pas oublier qu'une modélisation linéaire présente des limites ! Par exemple, la force exercée par un ressort est proportionnelle à son élongation. Une modélisation linéaire, explicitée en première année, est donc vraisemblable. Toutefois, si le ressort est trop allongé, il va se déformer de façon définitive, le modèle linéaire n'est plus adapté.

Un système linéaire invariant dans le temps est un système qui obéit aux propriétés

▷ de linéarité entre l'entrée et la sortie ;



▷ d'invariance temporelle. Cela signifie en particulier que l'on néglige tout phénomène de vieillissement et que la réponse à une même excitation est toujours la même.



## 2.3 Les systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Tous les systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants vérifient les propriétés des systèmes linéaires à invariance temporelle. Dans le cas général, ces systèmes sont décrits par une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s}{dt^i}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k e}{dt^k}(t) \quad (2.1)$$

avec tous les  $a_i$  et  $b_k$  des coefficients constants.

Tous les systèmes électroniques composés uniquement de composants linéaires comme les résistances, les condensateurs et les inductances, sont descriptibles par une telle équation différentielle. Par analogie, il en est de même pour tous les systèmes mécaniques soumis à des forces constantes ou linéaires en la vitesse.

## 2.4 La fonction de transfert

Tout d'abord, recherchons la réponse à une excitation sinusoïdale  $e(t) = e_0 \sin \omega t$ . Pour cela, passons en notation complexe pour simplifier les opérations dérivées. Le second membre de l'équation (2.1) s'écrit alors

$$\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k e}{dt^k}(t) = e_0 \Re \left( \left( \sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k \right) e^{j\omega t} \right).$$

En revenant à une écriture réelle, ce terme peut s'écrire comme  $e_0 B \sin(\omega t + \phi)$  avec  $B$  et  $\phi$  qui dépendent des coefficients  $b_k$ .

Nous recherchons maintenant une solution particulière à l'équation différentielle (2.1), sachant que le second membre est une fonction sinusoïdale. Dans ce cas, la résolution mathématique nécessite la recherche de la solution  $s(t)$  sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation que l'excitation, d'amplitude  $s_0$  inconnue et avec éventuellement un déphasage  $\phi$  inconnu aussi. Ainsi, nous posons  $s(t) = s_0 \Re \left( e^{j(\omega t + \phi)} \right)$ . L'équation (2.1) devient, en notation complexe,

$$s_0 e^{j\phi} \left( \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i \right) e^{j\omega t} = e_0 \left( \sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k \right) e^{j\omega t}.$$

**Définition.** On définit la **fonction de transfert complexe** d'un système linéaire par

$$\boxed{\frac{H(\omega)}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{e_0}} = \frac{s_0}{e_0} e^{j\phi} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}.$$

où l'on note les amplitudes complexes  $\underline{s} = s_0 e^{j\phi}$  et  $\underline{e} = e_0$ . Avec cette écriture, on constate immédiatement que l'amplitude et la phase de la réponse sont données par

$$\boxed{s_0(\omega) = |H(\omega)| e_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\phi(\omega) = \arg(H(\omega))}$$

avec les fonctions modules  $|\cdot|$  et argument  $\arg$  d'un nombre complexe.

**Remarque :** En électronique, pour trouver la fonction de transfert, on préférera utiliser les impédances et les lois générales de l'électrocinétique (lois des mailles, des nœuds, ponts diviseurs...) plutôt que de passer par l'équation différentielle. Et réciproquement, l'utilisation de la fonction de transfert permet de retrouver l'équation différentielle.

**Propriété.** Pour une excitation sinusoïdale donnée, la fonction de transfert  $H(\omega)$  permet de trouver la réponse au système. Ainsi, en régime forcé, on a

$$e(t) = e_0 \sin \omega t \longrightarrow \textcircled{\text{S}} \longrightarrow s(t) = |H(\omega)| e_0 \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

### 3 Application au filtrage linéaire

#### 3.1 Le théorème de Fourier

**Théorème.** Tout signal périodique se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal  $s(t)$  périodique de fréquence  $f$  s'écrit

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi nft + \varphi_n)$$

avec  $c_0$  la valeur moyenne du signal (ou composante continue),  $c_n$  et  $\varphi_n$  des coefficients dépendant du signal. Les différents coefficients  $c_n$  représentent le spectre du signal.

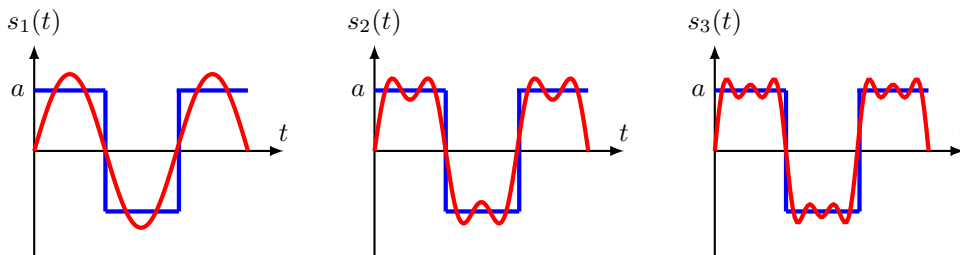
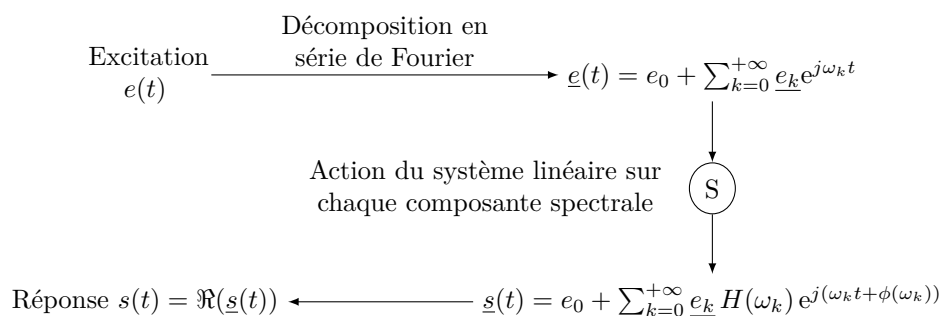


Fig. 2 – Décomposition de Fourier d'un créneau avec les trois premières harmoniques

#### 3.2 Utilisation de la fonction de transfert

Le traitement à l'aide du théorème de Fourier du signal est un outil qui permet d'étudier simplement la réponse du système. En effet, pour une excitation périodique quelconque, le signal  $e(t)$  peut s'écrire comme une série de Fourier. Le système étant linéaire, chaque composante harmonique  $\omega_k$  donne une réponse que l'on calcule grâce à la fonction de transfert  $H(\omega_k)$ . La réponse finale au système sera donnée par la somme de toutes les réponses aux composantes harmoniques. Il s'agit d'une opération de filtrage. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé vers le cours de première année.



Une activité numérique est disponible sous forme d'un Google Colab pour simuler cela. Elle est disponible en [suivant ce lien](#) [1].

##### 3.2.1 Exemple : le filtre passe-bas du premier ordre

On étudie à nouveau le circuit  $RC$  détaillé figure 3.

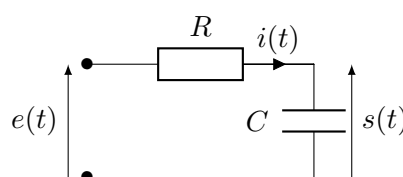


Fig. 3 – Le filtre  $RC$ .

**Prévision du caractère passe-bas** Nous étudions le circuit de la figure 3 en régime sinusoïdal forcé.

- ▷ à « basses fréquences », le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée ;
- ▷ à « hautes fréquences », le condensateur est équivalent à un fil, la tension de sortie donc nulle.

Ainsi, en basse fréquences le signal n'est pas modifiée alors qu'en haute fréquence le signal de sortie est nul. Il s'agit bien d'un **filtre passe-bas**.

**Calcul de la fonction de transfert** La fonction de transfert du système se trouve en faisant directement un pont diviseur de tension en utilisant les grandeurs complexes. Ainsi, à partir de la figure 3, il vient

$$\underline{s}(t) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \underline{e}(t) = \frac{1/(jC\omega)}{R + 1/(jC\omega)} \underline{e}(t).$$

**Propriété.** La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec  $\omega_0$  la **pulsation de coupure du filtre** et  $K$  une constante.

On reconnaît pour le filtre  $RC$  la pulsation de coupure  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ . Ici  $K = 1$ .

Le filtre est dit du premier ordre car les polynômes en  $j\omega$  du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert sont d'ordres 1 au maximum.

**Le diagramme de Bode** Nous avons vu qu'un signal exciteur d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$  sortait d'un système forcé sous la forme d'un signal de sortie toujours de pulsation  $\omega$  mais d'amplitude  $A|\underline{H}(\omega)|$ . Ainsi, chaque composante sinusoïdale d'un signal périodique quelconque va subir cette dilatation d'amplitude. La fonction de transfert permet donc de connaître l'effet d'un filtre sur un signal périodique.

Toutefois, le module de la fonction de transfert connaît de grandes variations d'amplitudes. Pour pouvoir les observer, on étudie la fonction de transfert sous une échelle logarithmique.

**Remarque :** Le logarithme décimal correspond à l'opération  $\log 10^x = x$ , il correspond à la mesure de la puissance de 10 d'un nombre. Ainsi, une variation de 1 pour un logarithme décimal correspond à une multiplication ou une division par 10.

**Définition.** Le **gain** d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|.$$

Le **gain en décibel** d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$$

avec  $\log$  le logarithme décimal. Le gain en décibel s'exprime en **décibels** (dB).

On choisit un facteur multiplication de 20 car

- ▷ le gain est multiplié par 10 pour manipuler des chiffres usuels ;
- ▷ on multiplie ensuite par 2 car  $20 \log |\underline{H}(\omega)| = 10 \log |\underline{H}(\omega)|^2$ , or les grandeurs énergétiques sont liées au carré du module de la fonction de transfert, et ce sont ces grandeurs énergétiques qui nous intéressent.

**Propriété.** Lorsque le gain diminue de 20 décibels, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10.

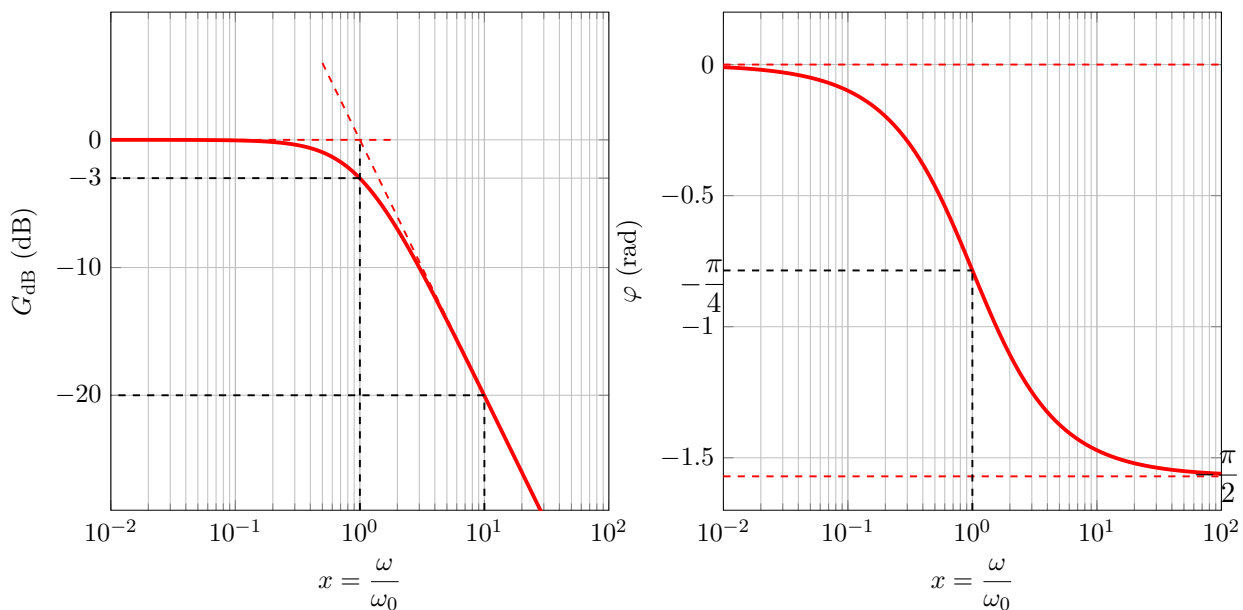
**Définition.** Le **diagramme de Bode** d'un filtre est le double tracé de

- ▷ le **gain en décibels** du filtre ;
- ▷ la **phase** de la fonction de transfert.

Ces deux tracés sont réalisés en fonction du **logarithme de la pulsation**.

On trace la pulsation sous échelle logarithmique car celle permet de décrire rapidement une grande gamme de valeur possible, tout en donnant une importance égale à chaque décade de pulsation.

Le diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1 est donné figure 4.



**Fig. 4** – Diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1.

**Diagramme de phase :** le diagramme de phase se déduit de :

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(\omega) = -\arg \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0},$$

car on rappelle que la tangente de l'argument d'un nombre complexe est égal au rapport de sa partie imaginaire sur sa partie réelle.

Le diagramme de gain est donc une fonction  $x \mapsto -\arctan(x)$  décroissante de 0 à  $-\pi/2$ . On rappelle de plus que  $\arctan(1) = \pi/4$ .

**Diagramme de gain :** calculons l'expression de  $G_{dB}(\omega)$ , il vient

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -10 \log \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right).$$

- ▷ Pour  $\omega < 10\omega_0$ , on constate que le diagramme de Bode est à peu près constant. En effet, on a dans cette zone  $G(\omega) \approx 1$  car  $(\omega/\omega_0)^2 \ll 1$  et donc on néglige  $(\omega/\omega_0)^2$  devant 1, soit un gain en décibels constant et nul.
- ▷ Pour  $\omega > 10\omega_0$ , on constate que le diagramme de Bode est une droite décroissante dont la pente vaut **- 20 dB par décade**. En effet, dans cette zone, on a  $G_{dB} \approx -20 \log(\omega/\omega_0)$  car  $(\omega/\omega_0)^2 \gg 1$  et donc on néglige 1 devant  $(\omega/\omega_0)^2$ . On retrouve bien la valeur numérique d'une pente de -20 décibels par décades en traçant  $G_{dB}$  en fonction de  $\omega$  en échelle logarithmique dans le diagramme de Bode.

Pour tracer le diagramme, on trace ces deux asymptotes. On constate numériquement que pour  $\omega = 10\omega_0$ ,  $G_{dB} \approx -20.04$  dB et que pour  $\omega = \omega_0/10$ ,  $G_{dB} \approx -0.04$  dB. Ainsi, la courbe réelle du gain en décibel est égale à ses asymptotes en dehors de la gamme comprise entre  $\omega_0/10$  et  $10\omega_0$ . Pour cette gamme intermédiaire, il suffit de relier les asymptotes en constatant que  $G_{dB}(\omega_0) = -3$  dB.

**La bande passante** On rappelle qu'une pulsation est dans la bande passante d'un oscillateur forcé si la relation ci-dessous est vérifiée :

$$G(\omega) = |H(\omega)| > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = 20 \log |H(\omega)| > 20 \log \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = 20 \log H_{\max} - 10 \log 2 .$$

Numériquement, on a  $10 \log 2 \approx 3$ .

**Définition.** La **bande passante d'un filtre à 3 décibels** est l'ensemble des pulsations tels que le gain en décibel soit compris entre le gain maximal  $G_{\text{dB,max}}$  et  $G_{\text{dB,max}} - 3$  dB.

On rappelle que la bande passante correspond à un transfert d'au moins 50% de l'énergie entre le signal d'entrée et le signal de sortie. Ainsi, pour une pulsation comprise dans la bande passante, on supposera qu'elle traversera effectivement le filtre.

Pour le filtre  $RC$ , la bande passante est donnée pour  $\omega < \omega_0$ . En effet, on constate figure 4 que le gain est une fonction décroissante et que  $G_{\text{dB,max}} = 0$ . De plus, pour  $\omega = \omega_0$ , on a  $G(\omega_0) = |\underline{H}(\omega_0)| = \left| \frac{1}{1+j} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Utilisation du diagramme de Bode** On veut connaître précisément la réponse du filtre à un signal d'entrée  $e_1(t) = e_1 \sin(\omega_1 t)$  avec  $\omega_1 = \omega_0/10$ .

Graphiquement, on lit pour  $\log \frac{\omega_1}{\omega_0} = -1$ , un gain de 0 et une phase  $\varphi_1 \approx -0.1$  rad. Ainsi, le signal de sortie vaut  $s(t) = e_1 10^{0/20} \sin(\omega_1 t + \varphi) = e_1 \sin(\omega_1 t + \varphi)$ .

**Application 1 :** Quelle est la réponse du filtre pour  $e_2(t) = e_2 \sin(\omega_2 t)$  avec  $\omega_2 = 10\omega_0$  ? Et pour  $e_1(t) + e_2(t)$  ?

**Effet moyennneur** Prenons un signal périodique de moyenne non nulle. D'un point de vue analyse de Fourier, la moyenne du signal correspond à la composante continue, soit la contribution au spectre pour  $\omega = 0$ . Notons  $\omega_1$  la pulsation fondamentale du signal considéré. Si le signal passe dans un filtre passe-bas de pulsation de coupure inférieure à  $\omega_1$ , il ne restera que la composante continue du signal, toutes les composantes harmoniques auront été coupées.

**Propriété.** Un signal périodique de pulsation fondamentale  $\omega_1$  filtré par un filtre passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_0$  telle que  $\omega_0 \ll \omega_1$  est **moyenné**. La sortie du filtre sera la valeur moyenne du signal d'entrée.

**Effet intégrateur** Considérons un filtre passe-bas d'ordre 1 de pulsation de coupure  $\omega_0$ . Cette fois un signal périodique de pulsation  $\omega_1 \gg \omega_0$  est filtré.

Dans ce cas, on a  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \approx \frac{\omega_0}{j\omega}$ . Ainsi, on a  $\underline{s} = \omega_0 \frac{\underline{e}}{j\omega}$ . En revenant en notation temporelle, on a  $\frac{ds}{dt}(t) = \omega_0 e(t)$ .

**Propriété.** Un signal périodique de pulsation fondamentale  $\omega_1$  filtré par un filtre passe-bas d'ordre 1 de pulsation de coupure  $\omega_0$  telle que  $\omega_0 \ll \omega_1$  est **intégré**. La sortie du filtre sera l'intégrale du signal d'entrée multipliée par la constante  $\omega_0$ .

**Remarque :** Ce n'est pas contradictoire avec le fait que le signal soit filtré. En effet, l'amplitude du signal de sortie est très faible par rapport à celle d'entrée, ce qui est bien le cas lorsque l'on intègre la fonction  $\cos \omega t$ . L'amplitude de l'intégrale dépend bien de  $1/\omega$  qui est faible si  $\omega$  est grand.

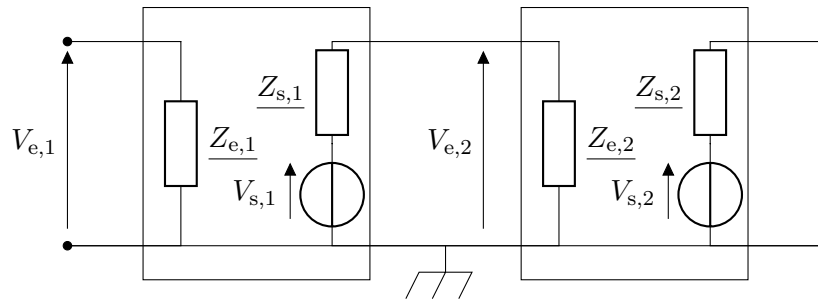
### 3.3 Associations de filtres

On souhaite réaliser un filtre complexe en associant plusieurs filtres les uns derrière les autres. Pour que l'association des filtres soit réalisable, il est nécessaire que le comportement de chaque filtre ne doit pas être influencé par les filtres voisins.

Chaque filtre est modélisé un quadripôle : deux pôles pour la tension d'entrée et deux pour la tension de sortie. Il se modélise alors par une impédance d'entrée  $\underline{Z}_e$ , une impédance de sortie  $\underline{Z}_s$  et un générateur de tension en sortie délivrant la tension  $\underline{s}(t) = \underline{H} \underline{e}(t)$ . En première approximation, l'impédance d'entrée correspond à l'impédance entre le signal d'entrée et la masse tandis que l'impédance de sortie correspond à l'impédance mesurée entre la sortie du filtre et la masse.

Considérons les blocs de la figure 5.  $\underline{Z}_e$  et  $\underline{Z}_s$  sont respectivement les impédances d'entrée et de sortie des blocs. En utilisant un pont diviseur de tension, on remarque que la tension d'entrée du second bloc





**Fig. 5** – Impédances d’entrée et de sortie de quadripôles électroniques. Le fil inférieur représente le fil de masse du système.

vaut

$$\underline{V_{e,2}} = \frac{Z_{e,2}}{Z_{e,2} + Z_{s,1}} \underline{V_{s,1}} .$$

Autrement dit, la tension reçue par le second bloc est influencée par la résistance de sortie du premier bloc. Pour s’affranchir de ce problème, on a besoin d’avoir  $|\underline{Z_{e,2}}| \gg |\underline{Z_{s,1}}|$ . Cette condition est indispensable pour traiter l’électronique par blocs.

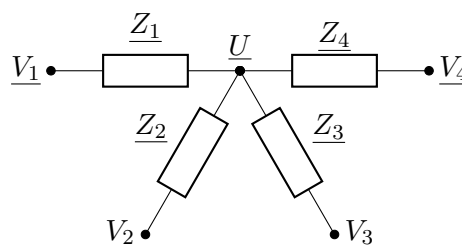
Par exemple, la résistance de sortie d’un Générateur Basse Fréquence (GBF) vaut  $50 \Omega$  alors que la résistance d’entrée d’un multimètre vaut environ  $10 \text{ M}\Omega$  et celle d’un oscilloscope  $1 \text{ M}\Omega$ . De plus, bien souvent des capacités sont aussi à prendre en compte dans les impédances d’entrée, celle de l’oscilloscope valant typiquement quelques picofarads.

Dans ce cas, et uniquement dans ce cas, si  $\underline{V_{s,1}} = \underline{H_1} \underline{V_{e,1}}$  et  $\underline{V_{s,2}} = \underline{H_2} \underline{V_{e,2}}$ , alors  $\underline{V_{s,2}} = \underline{H_1} \underline{H_2} \underline{V_{e,1}}$ .

Pour réaliser en pratique cette condition, on utilise bien souvent un montage suiveur, donc la fonction de transfert est égale à 1 mais qui a l’intérêt d’avoir une très faible impédance de sortie et une très grande impédance d’entrée. Le montage suiveur est alors intercalé entre les deux filtres.

## 4 Compléments

### 4.1 Le théorème de Millmann



Les potentiels affichés correspondent aux tensions par rapport à la masse du système.

On applique la loi d’Ohm en régime sinusoïdal forcé  $\underline{V} = \underline{Z} \underline{i}$ . D’où, en prenant comme convention que les courants se dirige vers le nœud, il vient  $\underline{i_k} = (\underline{V_k} - \underline{U})/\underline{Z_k}$  pour  $k = 1, 2, 3, 4$ .

On part de la loi des nœuds  $\sum_{k=1}^4 \underline{i_k} = 0$  avec la définition des courants donnée à la question précédente. Il vient la loi des nœuds en tension

$$\frac{\underline{U} - \underline{V_1}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{U} - \underline{V_2}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{U} - \underline{V_3}}{\underline{Z_3}} + \frac{\underline{U} - \underline{V_4}}{\underline{Z_4}} = 0 .$$

On isole  $\underline{U}$  dans l’expression précédente

$$\underline{U} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\underline{Z_k}} - \sum_{k=1}^4 \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} = 0$$

d'où le résultat

$$\underline{U} = \frac{\sum_{k=1}^4 \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_{k=1}^4 \frac{1}{Z_k}} .$$

Ce théorème est très utile en électronique. Toutefois, il n'est pas au programme, son utilisation nécessite donc de reproduire les étapes de démonstration explicitées ci-dessus.

Ce théorème se généralise à un nombre quelconque de dipôles.

## 4.2 L'amplificateur linéaire intégré (ALI)

### 4.2.1 Présentation

L'amplificateur linéaire intégré (ou amplificateur opérationnel) est un **composant actif**. Autrement dit, il doit être alimenté électriquement pour fonctionner et peut fournir de l'énergie au système. Cette alimentation électrique ne fait pas partie explicitement du montage électrique mais ne doit pas être oubliée, tout comme les alimentations des GBF ou des oscilloscopes par exemple.

L'ALI est modélisé par un bloc à trois connexions

- ▷ une entrée  $V_+$ , dite « non inverseuse » ;
- ▷ une entrée  $V_-$ , dite « inverseuse » ;
- ▷ une sortie  $V_s$ .

**Remarque :** Le composant électronique réel est un composant à « huit pattes », dont seules sept sont actives. Deux supplémentaires sont celles des entrées  $\pm 15\text{ V}$  et les deux autres peuvent permettre de régler des éventuels tensions de décalages ("offset").



Fig. 6 – Schématisations de l'ALI.

La modélisation complète de l'ALI intègre :

- ▷ les courants de polarisations  $i_+$  et  $i_-$ , représentant l'intensité des courants entrant dans chacune des entrées ;
- ▷ l'intensité du courant de sortie  $i_s$  ;
- ▷  $R_e$  la résistance d'entrée de l'ALI, représentant la résistance entre les bornes + et - ;
- ▷  $R_s$  la résistance de sortie de l'ALI, représentant la résistance entre la masse et la sortie.

La figure 7 représente la modélisation électrique équivalente de l'ALI.

### 4.2.2 Le modèle idéal de l'ALI

Au vu des ordres de grandeurs temporels précédents, on admet que l'on peut simplifier le modèle de l'ALI à un modèle idéal. On peut généraliser des exemples précédents les règles suivantes :

- ▷ soit l'ALI a une rétroaction positive, le régime transitoire est instable et l'ALI fonctionne en régime saturé ;
- ▷ soit l'ALI a une rétroaction négative, le régime transitoire est stable et l'ALI peut fonctionner en régime linéaire. Par ailleurs, on trouve que  $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ .

De plus, lorsque l'ALI n'a pas de rétroaction, la gamme possible pour le régime linéaire est très faible, de l'ordre de 0.1 mV. Au vu des dispositifs électroniques utilisés, le bruit ambiant sera bien souvent de cet ordre de grandeur. Le régime linéaire sans rétroaction est impossible à atteindre.

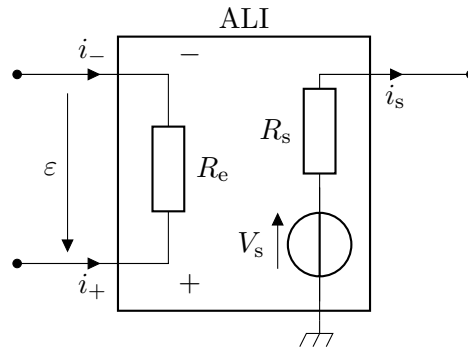


Fig. 7 – Modélisation équivalente de l'ALI.

Ainsi, la caractéristique statique de l'ALI de la figure ?? peut être modélisée différemment. En effet, tout se passe comme si  $A_0 = +\infty$  car le régime linéaire n'est atteint que pour  $\varepsilon \simeq 0$ . Dans ce cas idéal, la caractéristique de l'ALI est tracée figure 8.

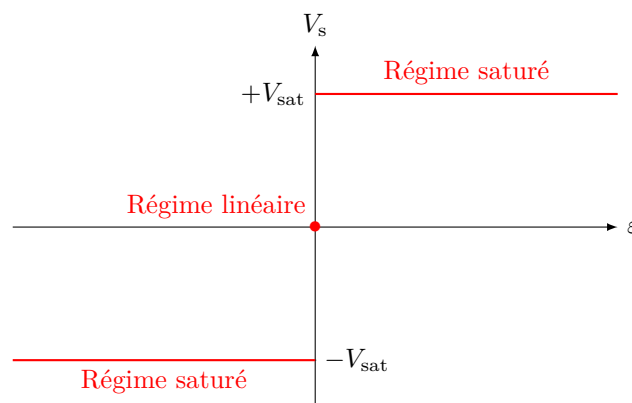


Fig. 8 – Caractéristique statique idéale de l'ALI.

**Propriété.** Un ALI idéal est modélisé par

- ▷ une résistance d'entrée  $R_e$  infinie, ainsi les courants d'entrée sont nuls soit

$$i_+ = i_- = 0 ;$$

- ▷ une résistance de sortie  $R_s$  nulle et l'existence d'un courant de saturation  $i_{\text{sat}}$  en sortie ;
- ▷ **en cas de rétroaction de la sortie sur l'entrée négative de l'ALI**, le régime linéaire est possible, et dans ce cas

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 ;$$

- ▷ **en cas de rétroaction de la sortie sur l'entrée positive de l'ALI ou s'il n'y a pas de rétroaction**, le régime saturé est atteint et

$$V_s = +V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad V_s = -V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon < 0 .$$

Avec ce modèle, la fonction de transfert de l'ALI n'est plus nécessaire pour traiter ce composant électronique. Avec ces quatre hypothèses, on peut traiter totalement n'importe quel problème. On retiendra le graphique figure 9 pour se souvenir du choix du régime saturé ou linéaire d'un ALI idéal.

### 4.3 Exemples de montages à ALI supposé idéal

#### 4.3.1 Le montage suiveur

Dans le paragraphe ??, nous avons mis en évidence l'importance des impédances d'entrée et de sortie des montages. Lorsque les impédances des quadripôles ne vérifient pas les propriétés demandées, le montage suiveur permet de les rétablir.

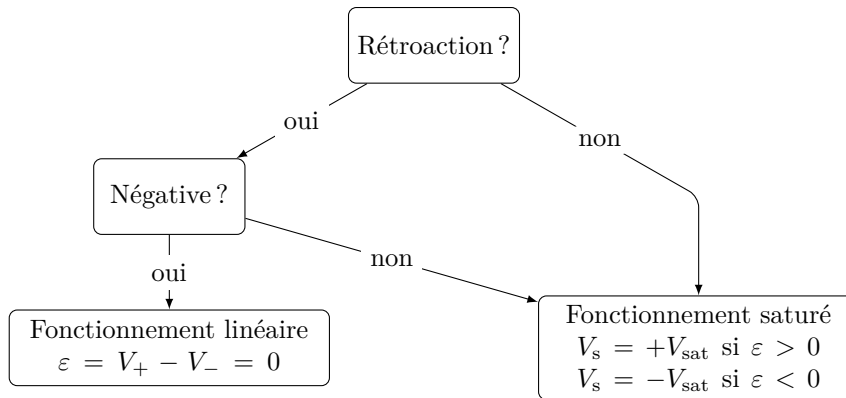


Fig. 9 – Représentation schématique du choix du régime de fonctionnement d'un ALI idéal.

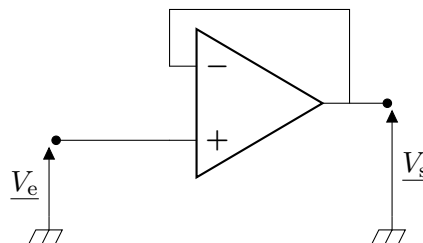


Fig. 10 – Le montage suiveur.

L'ALI possède une rétroaction négative, il fonctionne donc en régime linéaire. Par ailleurs,  $V_+ = V_-$  donc  $V_e = V_s$ . La fonction de transfert du montage vaut donc  $H(\omega) = 1$ .

Ce montage permet ainsi de réaliser une copie du signal d'entrée. Celui-ci est donc conservé et le reste du circuit électrique en aval ne peut pas avoir d'influence sur la suite du circuit. Un suiveur isole électriquement deux parties d'un circuit électrique.

### 4.3.2 Le montage amplificateur non-inverseur

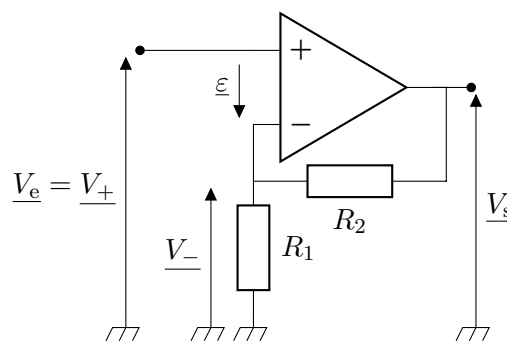


Fig. 11 – Schéma électrique de l'amplificateur non inverseur.

Il y a une rétroaction entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.

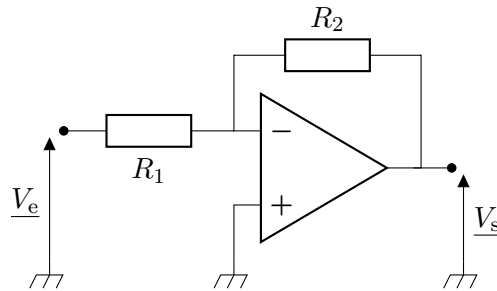
Dans le régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ . Or  $V_+ = V_e$ , on retrouve donc la tension d'entrée aux bornes de la résistance  $R_1$ . Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrée sont nuls, ainsi aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, on peut appliquer un pont diviseur de tension qui donne

$$V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \quad \text{d'où} \quad H(\omega) = \frac{R_2}{R_1} + 1$$

Ce résultat justifie le nom du montage. La tension d'entrée est amplifiée d'un facteur positif.

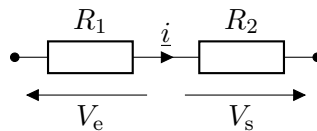
Le courant d'entrée est nul, ainsi l'impédance d'entrée est infinie.

### 4.3.3 Le montage amplificateur inverseur



Il y a une rétroaction entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.

Dans le régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ . Or  $V_+ = 0$  car l'entrée positive est reliée à la masse. Ainsi, la tension  $V_e$  se retrouve aux bornes de la première résistance et la tension  $V_s$  se retrouve aux bornes de la seconde résistance. Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrées sont nuls, ainsi aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, les résistances sont parcourus par le même courant  $\underline{i}$ . Le circuit est équivalent au circuit ci-dessous.



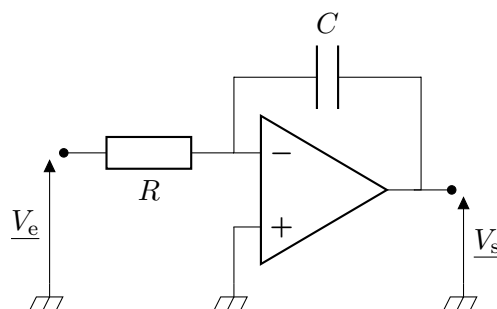
On utilise ensuite les impédances des dipôles et la loi d'Ohm, il vient

$$\underline{i} = \frac{V_e}{R_1} = -\frac{V_s}{R_2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}(\omega) = -\frac{R_2}{R_1}}$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Le signe moins provient de la convention, en effet, la loi d'Ohm s'applique en convention récepteur, alors que la résistance  $R_2$  est en convention générateur sur le circuit. Ce résultat justifie le nom du montage. La tension d'entrée est amplifiée d'un facteur négatif, ce qui inverse le signal.

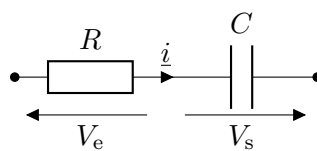
Le courant d'entrée traverse la résistance  $R_1$  qui a la tension d'entrée à ses bornes, la résistance d'entrée vaut donc  $R_1$ .

### 4.3.4 Le montage intégrateur



Il y a une rétroaction entre la sortie et l'entrée négative de l'ALI, celui-ci est donc en régime linéaire.

Dans le régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ . Or  $V_+ = 0$  car l'entrée positive est reliée à la masse. Ainsi, la tension  $V_e$  se retrouve aux bornes de la résistance et la tension  $V_s$  se retrouve aux bornes du condensateur. Par ailleurs, dans le régime linéaire, les courants d'entrées sont nuls, ainsi aucun courant n'arrive sur l'entrée négative de l'ALI. Par conséquent, la résistance et le condensateur sont parcourus par le même courant  $\underline{i}$ . Le circuit est équivalent au circuit ci-dessous.



On utilise ensuite les impédances des dipôles et on a

$$\underline{i} = \frac{V_e}{R} = -jC\omega V_s \quad \text{d'où} \quad \boxed{H(\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}}$$

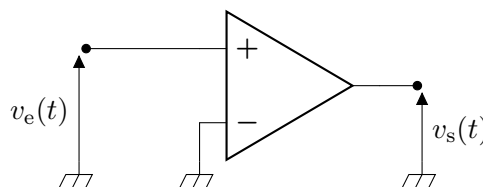
⚠️⚠️⚠️ **Attention !** Le signe moins provient de la convention, en effet, la loi d'Ohm s'applique en convention récepteur, alors que le condensateur  $C$  est en convention générateur sur le circuit.

On a  $V_e = -jRC\omega V_s$ . En repassant en temporel, on a  $V_e(t) = -RC \frac{dV_s}{dt}(t)$ , la tension de sortie est l'intégrale, à une constante près, de la tension d'entrée, d'où la dénomination du montage. Pour s'affranchir du signe négatif ainsi que du facteur  $RC$ , on peut utiliser ensuite un montage amplificateur inverseur vu à l'exercice précédent.

Le montage intégrateur vu précédemment sans ALI n'est valide que pour une certaine gamme de fréquence. L'ALI permet *a priori* de s'affranchir de cette contrainte.

Le courant d'entrée traverse la résistance  $R_1$  qui a la tension d'entrée à ses bornes, la résistance d'entrée vaut donc  $R_1$ .

### 4.3.5 Le comparateur simple



**Fig. 12** – Le montage comparateur simple.

Il n'y a pas de rétroaction, l'ALI est donc en régime saturé. Par ailleurs, comme l'entrée négative est reliée à la masse, on a  $\varepsilon(t) = v_+(t) - v_-(t) = v_e(t)$ . Ainsi, le signal de sortie vaut  $+V_{sat}$  lorsque le signal d'entrée est positif, et  $-V_{sat}$  lorsqu'il est négatif.

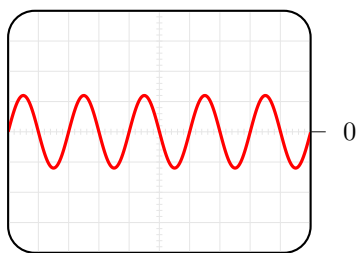
Dans le cas du circuit du comparateur simple, un tel dispositif peut servir de générateur de fonction créneau. Si le signal d'entrée est un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$ , alors le signal de sortie est un créneau qui possède une infinité d'harmoniques. **La génération d'harmonique est une des caractéristiques des systèmes non-linéaires**, illustré sur cet exemple figure 13.

Dans tous les exemples déjà traités, un signal de pulsation donnée en entrée du système donnait une réponse de même pulsation. Il s'agit d'une caractéristique essentielle des systèmes linéaires.

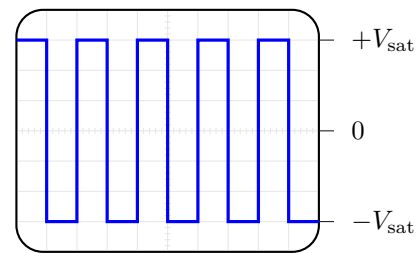
Pour les systèmes non linéaires, la situation n'est plus la même. Un système non linéaire est un système pour lequel la réponse d'une somme de signaux est différente de la somme des réponses des signaux pris séparément.

## Références

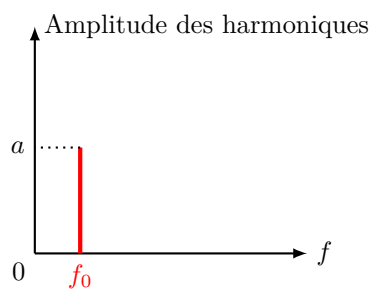
[1] <https://bit.ly/3kPLsnx>



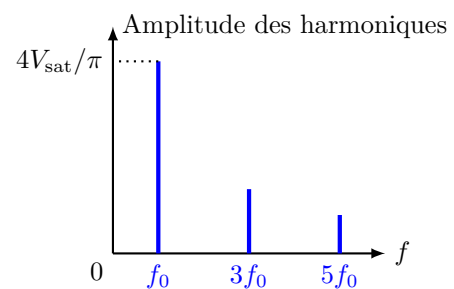
(a) Visualisation à l'oscilloscope du signal d'entrée.



(b) Visualisation à l'oscilloscope du signal de sortie créneau.



(c) Spectre du signal d'entrée sinusoïdal.



(d) Spectre du signal créneau. De nouvelles harmoniques sont présentes.

**Fig. 13** – Visualisation de l'effet d'un comparateur simple sur un signal sinusoïdal. Le spectre du signal de sortie est beaucoup plus riche que le spectre du signal d'entrée. La génération d'harmoniques est une des caractéristiques des systèmes non linéaires.