Élec 3 Les circuits linéaires du premier ordre

Lycée Vauvenargues - Physique-Chimie - PTSI 2 - 2020-2021

Contenu du programme officiel :

Notions et contenus	Capacités exigibles
Dipôles : condensateurs, bobines, Puissance.	- Citer les relations entre l'intensité et la tension. - Citer les ordres de grandeurs pour les composants L et C. - Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine.
Régime libre, réponse à un échelon.	- **Réaliser, pour un circuit, l'acquisition d'un régime transitoire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.** - Distinguer sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon. - Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine. - Déterminer les grandeurs électriques en régime permanent en remplaçant les bobines et les condensateurs par des interrupteurs fermés ou ouverts. - Établir la relation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. - Prévoir l'évolution du système, avant toute résolution de l'équation différentielle, à partir d'une analyse s'appuyant sur une représentation graphique de la dérivée temporelle de la grandeur en fonction de cette grandeur. - Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
Stockage et dissipation d'énergie.	- Réaliser des bilans énergétiques.

En gras les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Table des matières

Un système linéaire du premier ordre est un système physique décrit par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. Nous allons étudier en détail les systèmes électriques de type. Leurs résultats se généralisent aisément à tous les systèmes décrits par des équations différentielles similaires.

1 Les condensateurs

1.1 Présentation

Un condensateur est un système de deux plaques conductrices séparées par un milieu dit diélectrique (du verre, de la céramique, éventuellement de l'air...). Les plaques sont chargées électriquement et les électrons ne peuvent pas traverser le matériau. Le courant qui circule dans le reste du circuit apporte ou emporte ces charges. Chaque plaque est soit chargée positivement, soit négativement. Il y a donc une interaction électromagnétique qui sera précisée en seconde année. Ce principe est schématisé figure 1.

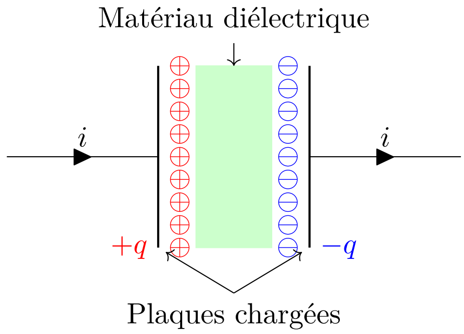


Fig. 1 – Schéma de principe d'un condensateur. Chaque plaque est chargée de la quantité $\pm q$.

Théorème. La tension $u(t)$ aux bornes de l'armature d'un condensateur est donnée par la relation $\boxed{q(t) = Cu(t)}$. avec $q(t)$ la charge positive dépendant du temps présente sur l'armature (en Coulombs) et C la **capacité** du condensateur en Farad (F).

La capacité dépend uniquement de la géométrie et des matériaux du condensateur.
En convention récepteur, dans un condensateur, on a

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}.$$

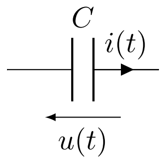


Fig. 2 – Représentation électrique d'un condensateur. Il doit toujours être représenté en convention récepteur

> ***Remarque :*** *La notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ fait référence à la dérivée mathématique par rapport à la variable temps t.*

Capacité	**Condensateur**
1 nF	Usuel (diélectrique en verre)
1 µF	Diélectrique en papier paraffiné
1 µF–100 µF	Diélectrique en céramique
1 mF	Électrochimique

On peut faire deux remarques :

- le Farad est une grande unité, un condensateur de 1 F est rare, ils sont utilisés par exemple pour les voiture ;
- des effets capacitifs, comme les effets résistifs, existent de partout ! En effet, ceux-ci apparaissent à partir du moment où deux conducteurs électriques peuvent avoir une influence électrostatique l'un sur l'autre.

Propriété. Il faut retenir deux propriétés importantes du condensateur.

- **La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue.** Ainsi, un condensateur protège contre les variations brusques de tension.
- Si la tension $u(t) = u_0$ est constante, alors $i(t) = 0$. Ainsi, **en régime permanent, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert**.

> ***Remarque :*** *Une fonction continue en mathématique est une fonction f telle que pour tout x_0 appartenant au domaine de définition, la limite à droite égale la limite à gauche égale la valeur de la fonction en ce point, autrement dit $\lim_{x>x_0, x\to x_0} f(x) = \lim_{x<x_0, x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

> *Le régime électrique permanent signifie que les grandeurs électriques restent constantes au cours du temps.*

> ***Remarque :*** *Le modèle réel d'un condensateur comprend une résistance de fuite très élevée en parallèle du condensateur. Cette résistance matérialise l'air ambiant et permet une une déperdition progressive de l'énergie lorsque le condensateur est débranché.*

1.2 Aspect énergétique

En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur vaut

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = u(t)i(t) = u(t)C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{u(t)^2}{2}\right)$$

où l'on a utilisé la relation mathématique à connaître $(f^2)' = 2ff'$.

Définition. L'énergie électrostatique stockée dans un condensateur vaut

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{électrostatique}}(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2}.$$

Cette énergie s'exprime évidemment en Joule. La puissance reçue par un condensateur vaut la dérivée de cette énergie :
- si de l'énergie est apportée au condensateur, la puissance est positive et le condensateur a un caractère récepteur ;
- au contraire, si le condensateur libère de l'énergie au système, la puissance est négative et le condensateur a un caractère générateur.

1.3 Mise en évidence expérimentale de la charge et la décharge d'un condensateur

> ***Expérience 1 :*** *Charge et décharge d'un condensateur.*

On réalise le montage électrique ci-contre :
- la tension $E(t)$ est une fonction créneau périodique ;
- R est une résistance variable ;
- $U_\mathrm{C}(t)$ est la tension aux bornes du condensateur ;
- le condensateur C est initialement déchargé.

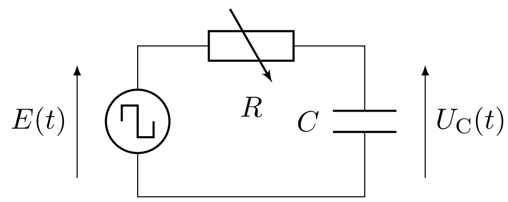


Fig. 3 – Schéma électrique du circuit RC.

On observe à l'oscilloscope simultanément la tension $E(t)$ et la tension aux bornes du condensateur $U_\mathrm{C}(t)$. Les oscillogrammes observés sont reproduits qualitativement figure 4 pour deux valeurs de résistance. Ces résultats sont reproduits dans la simulation [1].

On observe :
- au bout d'un certain temps, la tension aux bornes du condensateur est identique à celle imposée par la tension d'entrée ;
- ce temps est plus faible lorsque la résistance diminue.

Lorsque la tension aux bornes du condensateur est constante, la charge électrique $q(t)$ sur ses armatures est constante grâce à la relation $q(t) = CU_\mathrm{C}(t)$. Ainsi, on dit que le condensateur est **chargé électriquement**.

2 Charge d'un condensateur

2.1 Position du problème

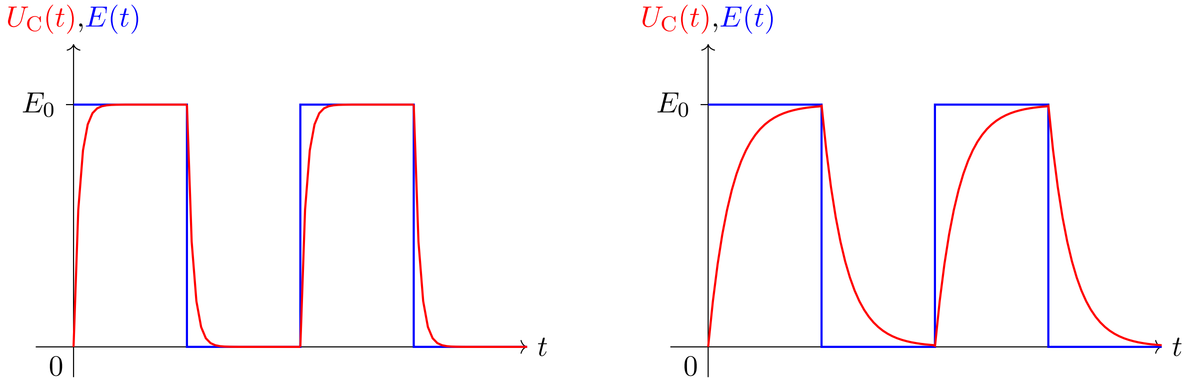


Fig. 4 – Représentation de deux oscillogrammes du circuit de la figure 3. Pour l'oscillogramme de gauche, la résistance R est plus faible que pour celui de droite.

Pour étudier la situation expérimentale réalisée précédemment, on étudie théoriquement le montage électrique ci-contre :

▷ la tension E_0 est une fonction constante ;
▷ l'interrupteur est fermé au temps $t = 0$;
▷ le condensateur est initialement déchargé.

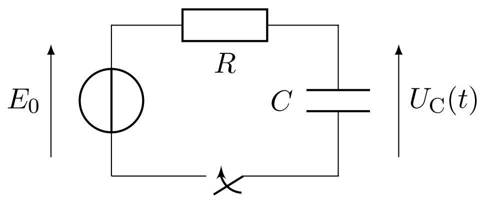
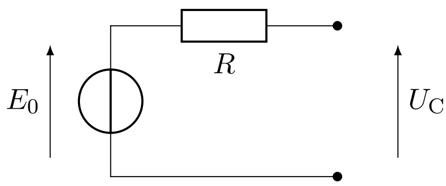


Fig. 5 – Schéma électrique de la charge du condensateur.

2.2 Discussion qualitative : anticipation des régimes permanents

On a constaté expérimentalement qu'après un certain temps, la tension au borne du condensateur devient constante lorsque la tension aux bornes du générateur l'est. Par ailleurs, on sait que lorsque le régime permanent est atteint, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Ainsi, lors du régime permanent, le circuit électrique est équivalent au circuit



Ainsi, **lorsque le régime permanent est atteint**, on sait par avance qu'on a $U_C = E_0$. On va retrouver ce résultat par le calcul par la suite.

2.3 Mise en équation électrique

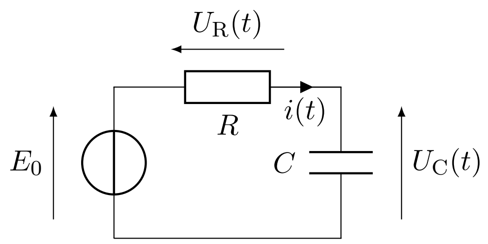
Dans ce paragraphe, et plus généralement pour tout problème électrique ayant des variations temporelles, on procédera en utilisant la méthode suivante.

Méthode pour obtenir une équation électrique :

1. faire figurer et nommer toutes les tensions et tous les courants sur le schéma, en respectant les conventions récepteurs ou générateurs ;
2. écrire toutes les relations constitutives des dipôles, numéroter les équations ;
3. écrire toutes les lois des mailles et lois des nœuds indépendantes du problème, numéroter les équations ;
4. parmi les relations lois des mailles ou lois des nœuds, choisir celle qui contient le plus termes différents, la réécrire ;
5. réutiliser l'une après l'autre chacune des équations précédentes pour faire disparaître une des inconnues dans toutes les équations restantes - si cette opération n'est pas possible, dériver les relations des dipôles ou la longue relation puis retenter l'opération ;
6. lorsque l'on arrive à une équation différentielle dans laquelle n'apparaît donc qu'une unique fonction, la réécrire sous la **forme canonique** en divisant l'équation pour avoir un 1 devant la dérivée d'ordre maximal.

Appliquons cette méthode dans l'ordre sur le circuit de la figure 5.

1. Sur le circuit de la figure 5, il manque la tension aux bornes de la résistance et le courant électrique que l'on rajoute sur le schéma.



2. On écrit les relations des deux dipôles. D'abord la loi d'Ohm

$$U_{\mathrm{R}}(t) = Ri(t)\ ; \tag{2.1}$$

puis la relation fondamentale du condensateur que l'on dérive immédiatement

$$q(t) = CU_{\mathrm{C}}(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = i(t) = C\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}\ . \tag{2.2}$$

> ***Remarque :*** *Pour un condensateur, on utilise toujours la relation entre le courant et la dérivée de la tension. La relation entre la charge et la tension n'est jamais utile lors d'une mise en équation électrique.*

3. Le circuit est constitué d'une seule maille et d'aucun nœuds. On applique la loi des mailles et il vient

$$E_0 = U_{\mathrm{C}}(t) + U_{\mathrm{R}}(t)\ . \tag{2.3}$$

4. On réécrit l'équation (2.3).
5. On remplace la tension $U_{\mathrm{R}}(t)$ en utilisant la relation (2.1), il vient

$$E_0 = U_{\mathrm{C}}(t) + Ri(t)\ . \tag{2.4}$$

On remplace le courant à l'aide de la relation (2.2), il vient

$$E_0 = U_{\mathrm{C}}(t) + RC\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}\ .$$

6. On réécrit l'équation différentielle pour avoir un coefficient 1 devant le terme avec la dérivée la plus haute et il vient au final **l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** électrique de la charge d'un condensateur

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_{\mathrm{C}}(t) = \frac{E}{RC}}\ . \tag{2.5}$$

La fonction U_{C} est la fonction inconnue.

2.4 Résolution et discussion

▶ Méthode de résolution d'une EDLC1 en Physique-Chimie

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constantes (EDLC1) en physique ou en chimie, on suivra toujours la méthode suivante.

> ***Remarque :*** *Ce type d'équation différentielle se retrouvera très souvent dans différents chapitres tout au long des deux ans. Il est donc indispensable de maîtriser cet outil.*

Méthode pour résoudre une EDLC1 en Physique-Chimie :

1. s'assurer que le coefficient devant la dérivée est bien égal à 1, l'équation différentielle est alors de la forme
$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + af(t) = b$$
avec a et b deux constantes dimensionnées ;
2. poser la constante de temps $\tau = 1/a$ (toujours homogène à une durée), l'équation différentielle est alors de la forme
$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f(t) = b\ ; \tag{2.6}$$
3. indiquer le calcul de **la solution homogène de l'équation différentielle**, c'est-à-dire la solution mathématique de $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}f(t) = 0$. Cette solution s'écrit toujours, avec K une constante inconnue,
$$f_1(t) = K\exp\left(-t/\tau\right)\ ;$$
4. indiquer le calcul de **la solution particulière de l'équation différentielle**, c'est-à-dire la recherche d'une solution de l'équation avec second membre. Dans notre cas, le second membre sera toujours constant, on cherche donc une fonction solution f_2 constante. On pose donc $f_2(t) = K'$ et l'on réintroduit cette solution dans l'équation (2.6). Comme la dérivée d'une constante est nulle, il vient
$$f_2(t) = b\tau\ ;$$
5. écrire la **solution générale de l'équation différentielle** comme la somme des deux précédentes solutions ;
6. à l'aide d'arguments physique ou avec les données de l'énoncé, identifier les **conditions initiales** du problème et les utiliser avec la solution générale pour en déduire la constante K ;
7. écrire la fonction finale $f(t)$ en l'encadrant, puis tracer le graphe correspondant.

▶ Application à la charge du condensateur

Considérons la charge du condensateur. Ainsi, on suppose que le condensateur est initialement déchargé. Reprenons donc l'équation (2.5) et appliquons la méthode précédente.

1. On récrit l'équation différentielle sous la forme canonique
$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_\mathrm{C}(t) = \frac{E_0}{RC}\ .$$
2. On pose $\boxed{\tau = RC}$ **la constante de temps** de la charge et de la décharge du condensateur. Le second membre est déjà sous la forme demandée, il vient
$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U_\mathrm{C}(t) = \frac{E_0}{\tau}\ .$$
3. **Solution Homogène :** $U_1(t) = C\exp(-t/\tau)$ avec C une constante.
4. **Solution Particulière :** L'équation différentielle étant à second membre constant, on cherche la solution particulière sous la forme $U_2(t) = K$ avec K une constante. On remplace cette solution dans l'équation différentielle, et on a évidemment $\dfrac{\mathrm{d}U_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ et donc il vient $K/\tau = E_0/\tau$ soit $U_2(t) = E_0$.
5. **Solution générale :**
$$U_\mathrm{C}(t) = U_1(t) + U_2(t) = C\exp(-t/\tau) + E_0\ .$$
6. **Conditions Initiales :** Le condensateur est initialement déchargé. Par ailleurs, **la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue**, ainsi $0 = U_\mathrm{C}(t=0^-) = U_\mathrm{C}(t=0^+) = U_\mathrm{C}(0)$.

> ***Remarque :*** *Certaines grandeurs électriques ne sont pas continues. La phrase indiquée en gras est ici un argument physique indispensable pour conclure. Il faut absolument l'écrire.*

On a donc avec la solution générale $U_\mathrm{C}(0) = U_1(0) + U_2(0)$ soit $0 = C + E_0$, d'où $C = -E_0$.

7. On conclut en encadrant la solution

$$\boxed{U_{\mathrm{C}}(t) = E_0(1 - \exp(-t/\tau))}\,. \tag{2.7}$$

> ***Remarque :*** *On retrouve bien ce qui avait été anticipé précédemment, à savoir que le régime permanent est atteint lorsque $t \to +\infty$ et dans ce cas $U_C(t) = E(t) = E_0$.*

Cette fonction est tracée figure 6.

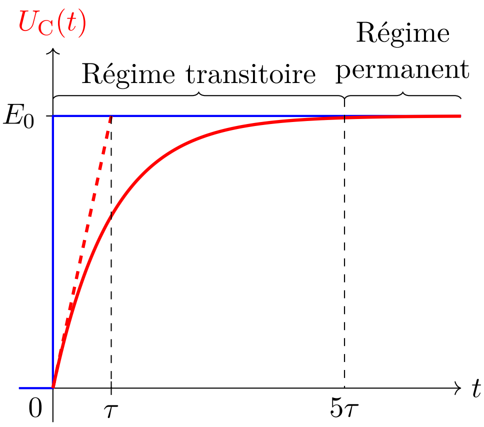


Fig. 6 – À $t = 0$, le générateur fournit une tension E_0. Le condensateur est initialement déchargé et il se charge au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, la tension ne varie plus. Il s'agit de la **réponse du condensateur à un échelon de tension**.

> ***Remarque :*** *Les trois remarques suivantes doivent toujours être tracées sur le graphe :*
>
> ▷ *la pente à l'origine croise la solution du régime permanent après un temps τ ;*
>
> ▷ *pour le temps $t = \tau$, la fonction a atteint 63 % de sa valeur finale ;*
>
> ▷ *après environ 5τ, on admet que la solution est égale à celle du régime permanent. En effet, $\exp(-5) \approx 0.006$ que l'on considère comme nul.*

▶ Portrait de phase du système

Définition. Le **portrait de phase** d'un système est le tracé de la dérivée de la grandeur d'étude du système en fonction de cette même grandeur. Il s'agit d'une courbe paramétrée par le temps t, appelée généralement trajectoire.

Dans le système que nous étudions, il faut donc réaliser un tracé graphique de $\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $U_{\mathrm{C}}(t)$. On observe à l'aide de l'équation différentielle une droite affine de pente $-1/\tau$ et d'ordonnée à l'origine E_0/τ.

Propriété. Un portrait de phase sous forme de droite décroissante est caractéristique d'un système du premier ordre.

L'état initial se trouve grâce à la loi des mailles. En effet, on a $E_0 = Ri(0) + U_{\mathrm{C}}(0)$. La tension initiale au borne du condensateur étant nulle, on a $\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(0)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i(0)}{C} = \dfrac{E_0}{RC}$. Ce résultat se retrouve logiquement directement dans l'équation différentielle. Au contraire, pour l'état final, le courant est nul car la tension U_{C} a atteint la valeur E_0. La dérivée de la tension est donc aussi nulle.

Le portrait de phase est donc une droite partant d'un état initial de dérivée non nulle et de fonction nulle pour arriver vers un état final de dérivée nulle et de fonction non nulle. Il est tracé figure 7.

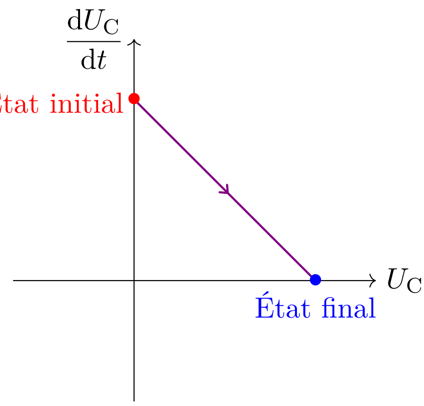


Fig. 7 – Portrait de phase de la décharge du condensateur. Le système parcourt cette courbe au cours du temps dans le sens de la flèche. Il s'agit d'une droite de pente $-1/\tau$.

> ***Application 1 :*** *Quelle est l'allure du portrait de phase si E_0 est négative ?*

> ***Remarque :*** *Un tel graphique peut s'obtenir expérimentalement à l'oscilloscope. Celui-ci doit être réglé en mode XY en mesurant la tension aux bornes du condensateur sur la première voie puis le tension aux bornes de la résistance sur la seconde voie. Cette seconde tension valant $RC\dfrac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t}$, on obtient bien le portrait de phase.*

2.5 Bilans énergétiques

Méthode pour réaliser les bilans énergétique :
1. réécrire la loi des mailles lorsque tous les termes sont explicités (resp. des nœuds) ;
2. multiplier l'équation par le courant (resp. la tension) ;
3. identifier chacun des termes de l'équation puis constater la conservation de la puissance ;
4. en intégrant entre $t = 0$ et $t = +\infty$, calculer les différents termes énergétiques. Au moins un de ces termes se déduira systématiquement du bilan de puissance.

> ***Remarque :*** *Même si l'on sait par avance que l'énergie va se conserver, il est indispensable de le démontrer à chaque fois.*

Appliquons cette méthode pour le système étudié.

1. Reprenons l'équation (2.4) :
$$E(t) = U_\mathrm{C}(t) + Ri(t)\ .$$
2. Multiplions cette équation par $i(t)$, il vient
$$E_0 i(t) = U_\mathrm{C}(t)i(t) + Ri(t)^2\ .$$
Or on sait que $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où
$$E_0 i(t) = CU_\mathrm{C}(t)\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t)^2\ .$$
On reconnaît une dérivée dans le premier terme et il vient au final
$$E_0 i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}U_\mathrm{C}(t)^2\right) + Ri(t)^2\ .$$
3. On reconnaît donc au final le **bilan de puissance**
$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{G}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}(t)}\ . \tag{2.8}$$

La puissance fournie par le générateur $\mathcal{P}_G(t) > 0$ est transférée en puissance électrostatique et le reste est dissipé en effet Joule. La puissance électrostatique correspond à une variation de l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur $\mathcal{E}_C(t)$.
Lors de la charge du condensateur, la tension augmente donc de l'énergie est stockée dans celui-ci. Le condensateur a alors un caractère récepteur.

4. On calcule les différentes énergies.
   - ▷ L'énergie stockée dans le condensateur est la plus simple à calculer, en effet, on sait que cette énergie est initialement nulle car le condensateur est déchargé et de plus cette énergie vaut en chaque instant $\mathcal{E}_C(t) = \dfrac{1}{2}CU_C(t)^2$ soit une énergie finale stockée $\boxed{\Delta\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}CE_0^2}$.
   - ▷ L'énergie fournie par le générateur s'appelle **travail électrique** fourni et s'écrit W_G. Celui-ci vaut $\boxed{W_G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathcal{P}_G(t)}$, soit
   $$W_G = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ E_0 i(t) = E_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ i(t) = E_0 C \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}U_C(t)}{\mathrm{d}t} = E_0 C\left[U_C(t)\right]_0^{+\infty}\ ;$$
   et donc $\boxed{W_G = CE_0^2}$.
   - ▷ L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joule se note $\boxed{W_J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathcal{P}_J(t)}$. En intégrant le bilan de puissance (2.8) entre $t = 0$ et $t = +\infty$, il vient immédiatement $\boxed{W_J = W_G - \Delta\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}CE_0^2}$.
   Sans utiliser le bilan de puissance, on peut plus retrouver ce résultat en calculant directement l'intégrale de $\mathcal{P}_J(t)$. Pour cela, il faut calculer la fonction i puis calculer l'intégrale de i^2.

> ***Remarque :*** *On utilise le symbole Δ pour mesurer l'énergie stockée dans le condensateur car cette énergie correspond bien à la différence entre ce qui était initialement stockée et ce qui reste à la fin. La notation W fait elle référence à un travail qui dépend de la transformation et qui ne peut pas s'écrire comme une différence de deux termes. Nous reviendrons rigoureusement sur ces notations en fin d'année lors des chapitres de thermodynamique.*

| ***Application 2 :*** *Retrouver la valeur de l'énergie dissipée par effet Joule par un calcul direct.*

On remarque qu'exactement la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée sous forme de chaleur dans la résistance. Cette dissipation est intrinsèque à la charge du condensateur et ne dépend pas de la valeur de celui-ci. La valeur de C modifie juste la constante de temps du processus, donc sa vitesse. Charger un condensateur est donc un processus qui provoque irrémédiablement la perte de la moitié de l'énergie fournie.

2.6 La décharge du condensateur

▶ Position du problème

On étudie cette fois théoriquement le montage électrique ci-contre :
- ▷ l'interrupteur est fermé au temps $t = 0$;
- ▷ le condensateur est initialement chargé à la tension E_0.

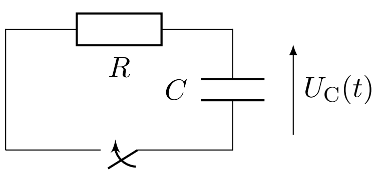


Fig. 8 – Schéma électrique de la décharge du condensateur.

▶ Mise en équation électrique et résolution de l'équation

> *Application 3 :*
>
> ▷ *Sans aucuns calculs, prévoir la valeur finale de la tension aux bornes du condensateur.*
>
> ▷ *Montrer que la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle*
>
> $$\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}U_C(t) = 0$$
>
> *avec la constante de temps $\tau = RC$.*
>
> ▷ *Ensuite, en utilisant les conditions initiales et les propriétés du condensateur, montrez que*
>
> $$U_C(t) = E_0 \exp(-t/\tau)\ .$$
>
> ▷ *Tracer le portrait de phase du système.*

Cette fonction est tracée figure 9.

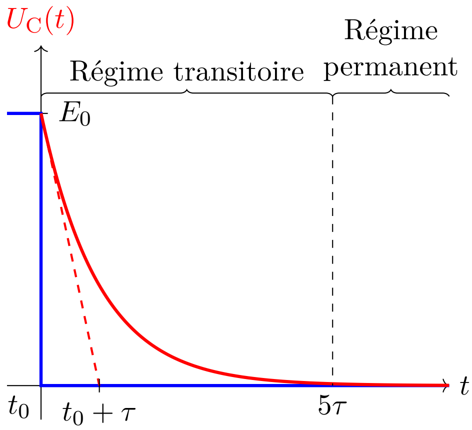


Fig. 9 – À $t = t_0$, le générateur est coupé. Le condensateur est initialement chargé et il se décharge au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, la tension ne varie plus. Il n'y pas de tension imposée au condensateur, on parle de **régime libre**.

▶ Bilan énergétique

> *Application 4 : Réaliser un bilan de puissance et montrer que le condensateur a un caractère générateur. Calculer ensuite l'énergie dissipée dans la résistance.*

3 Généralités sur les systèmes linéaires du premier ordre

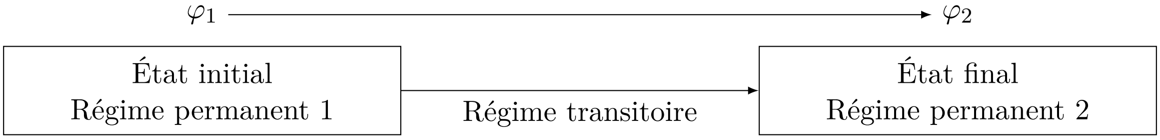
Un système linéaire du premier ordre est un système physique dont l'évolution de la grandeur physique $\varphi(t)$ le décrivant est régie par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (EDLC1) soit

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\varphi(t) = \frac{1}{\tau}\varphi_0\ .$$

Ce type de système est très répandu, par exemple :
- ▷ charge et décharge d'un condensateur ;
- ▷ établissement du courant dans une bobine ;
- ▷ freinage par frottements visqueux ;
- ▷ désintégration atomique ;
- ▷ certaines cinétique de décomposition d'une espèce chimique...

Plusieurs de ces exemples seront traités dans l'année. Ainsi, il est indispensable de maîtriser les outils physiques et mathématiques qui permettent le traitement de tels systèmes.

Il s'agit toujours d'une modification de l'état d'équilibre initial par la modification d'un paramètre extérieur. Après une phase transitoire, un nouvel état d'équilibre permanent est atteint.



Pour les systèmes du premier ordre, le régime transitoire est toujours liée à une exponentielle décroissante de la forme $\exp(-t/\tau)$. De plus, le portrait de phase du système est une droite décroissante de pente $-1/\tau$ parcourue de sorte à aller de l'état initial vers l'état final.

4 Établissement d'un courant dans une inductance

4.1 Les inductances

▶ Présentation et modèle idéal

Une inductance, aussi appelée bobine, est un fil enroulé autour d'un éventuel noyau magnétique. Lorsque le courant parcourt ce fil, comme nous le verrons au second semestre, un champ magnétique apparaît. Ce champ magnétique tend, par ses effets, à s'opposer aux variations de courants imposées par l'extérieure. C'est un effet d'induction. Ce principe est schématisé figure 10.

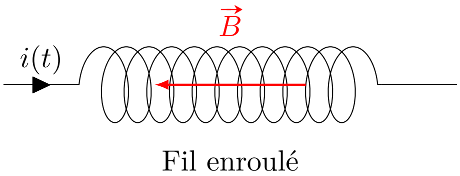


Fig. 10 – Schéma de principe d'une bobine. Un champ magnétique apparaît et ralentit les variations du courant.

Définition. En convention récepteur, la tension $u(t)$ aux bornes la bobine est donnée par la relation

$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

avec i le courant traversant la bobine et L l'**inductance** en Henry (H).
L'inductance dépend de la géométrie des boucles circuit ainsi que de l'éventuelle présence d'un matériau magnétique à l'intérieur de l'enroulement.

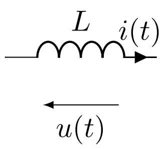


Fig. 11 – Représentation électrique d'une bobine. Elle doit toujours être représentée en convention récepteur

On peut faire deux remarques :
- ▷ les bobines disponibles en TP d'électroniques sont de l'ordre du mH ;
- ▷ des effets inductifs sont présents dès que les fils forment des boucles (effets d'antennes).

Propriété. Il faut retenir deux propriétés importantes des bobines.
- ▷ **Le courant traversant une bobine est une fonction continue.** Ainsi, une bobine protège contre les variations brusques de courant.
- ▷ Si le courant $i(t) = I_0$ est constant, alors $u(t) = 0$. Ainsi, **en régime permanent, une bobine est équivalente à un fil**.

> ***Remarque :*** *Le modèle réel d'une inductance comprend une résistance très faible en série de la bobine. Cette résistance correspond à la résistance du fil électrique constituant la bobine, éventuellement non négligeable car l'enroulement nécessite un très long fil.*

▶ Aspect énergétique

En convention récepteur, la puissance reçue par la bobine vaut

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = u(t)i(t) = i(t)L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{i(t)^2}{2}\right) .$$

Définition. L'énergie magnétique stockée dans une bobine vaut

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{magnétique}}(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)} .$$

Cette énergie s'exprime évidemment en Joule. La puissance reçue par une bobine vaut la dérivée de cette énergie :
- ▷ si de l'énergie est apportée à la bobine, la puissance est positive et la bobine a un caractère récepteur ;
- ▷ au contraire, si la bobine libère de l'énergie au système, la puissance est négative et la bobine a un caractère générateur.

4.2 Étude de l'établissement d'un courant dans une inductance

En réutilisant les outils élaborés dans la première partie du chapitre, nous allons traiter un autre exemple impliquant une bobine.

▶ Présentation et discussion qualitative

Étudions le circuit de la figure 12. On s'intéresse à l'évolution du courant $i_{\mathrm{L}}(t)$ dans la bobine.

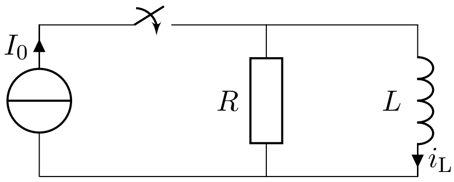


Fig. 12 – Un générateur de courant fournit le courant fixe I_0. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert. On le ferme à $t = 0$.

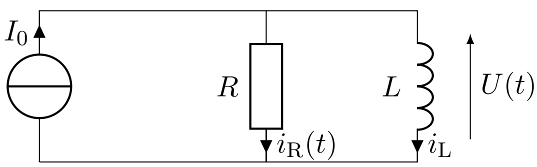
On peut d'abord prévoir le comportement qualitatif de ce courant.
- ▷ Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et un régime permanent est atteint, la bobine se comporte donc comme un fil et $i_{\mathrm{L}}(t < 0) = 0$.
- ▷ Pour $t \to +\infty$, l'interrupteur est fermé et un régime permanent est atteint. La bobine est équivalente à un fil qui court-circuit la résistance. On a donc $i_{\mathrm{L}}(t \to +\infty) = I_0$.

Le courant parcourant une bobine est une fonction continue, il va donc passer continument de 0 à I_0.

▶ Mise en équation électrique

Reprenons étapes listées dans le paragraphe 2.3.

Reproduisons d'abord la figure avec toutes les notations électriques nécessaires une fois l'interrupteur fermé.



La résistance vérifie la loi d'Ohm

$$U(t) = Ri_{\mathrm{R}}(t) \tag{4.1}$$

et la relation fondamentale de la bobine indique

$$U(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{4.2}$$

La loi des nœuds implique

$$I_0 = i_{\mathrm{R}}(t) + i_{\mathrm{L}}(t) \ . \tag{4.3}$$

Dans cette équation, on remplace $i_{\mathrm{R}}(t)$ par $U(t)/R$ et il vient

$$I_0 = \frac{1}{R}U(t) + i_{\mathrm{L}}(t) \ .$$

Ensuite, on remplace la tension $U(t)$ par son expression et il vient

$$I_0 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} + i_{\mathrm{L}}(t) \ .$$

La dernière étape consiste à mettre l'équation différentielle sous forme canonique et il vient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{R}{L}I_0} \ . \tag{4.4}$$

De cette équation, on constate que le portait de phase de l'établissement du courant dans la bobine est le même que celui de la charge du condensateur.

▶ **Résolution**

Reprenons les étapes listées dans le paragraphe 2.4.1.

On pose la constante de temps $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ et l'équation différentielle (4.4) s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{\tau}I_0 \ .$$

- ▷ **Solution générale de l'équation homogène** : $i_1(t) = C\exp(-t/\tau)$ avec C une constante.
- ▷ **Solution particulière :** cette équation est à second membre constant constant. On pose $i_2(t) = K$ cette constante. On injecte cette solution dans l'équation. La dérivée d'une constante est nulle et on a donc $i_2(t) = I_0$.
- ▷ **Solution générale :**

$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_1(t) + i_2(t) = C\exp(-t/\tau) + I_0 \ .$$

- ▷ **Conditions initiales :** on utilise le fait que **le courant à travers une bobine est une fonction continue du temps**, et donc $0 = i_{\mathrm{L}}(0^-) = i_{\mathrm{L}}(0^+) = i_{\mathrm{L}}(0)$. On utilise cette condition dans la solution générale et $0 = C + I_0$ soit $C = -I_0$.
- ▷ La solution finale de cette équation est

$$\boxed{i_{\mathrm{L}}(t) = I_0(1 - \exp(-t/\tau))} \ . \tag{4.5}$$

On remarque que l'on retrouve bien les comportements qualitatifs du paragraphe 4.2.1.
- ▷ On peut tracer la solution sur un graphique figure 13.

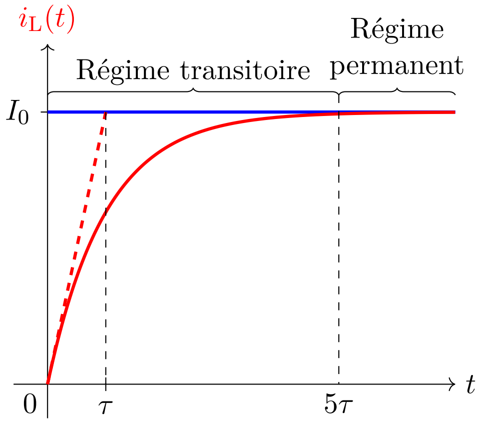


Fig. 13 – À $t = 0$, le générateur fournit le courant I_0. Le courant dans la bobine est initialement nul et il s'établit au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, le courant ne varie plus.

▶ Aspects énergétiques

À nouveau, reprenons la méthode donnée en paragraphe 2.5. Réécrivons donc la loi des nœuds (4.3) $I_0 = i_\mathrm{R}(t) + i_\mathrm{L}(t)$ qu'il faut multiplier par la tension pour obtenir

$$I_0 U(t) = i_\mathrm{R}(t)U(t) + i_\mathrm{L}(t)U(t) \ .$$

Utilisons maintenant les définitions de la tension (4.1) et (4.2) donnée par les relations des dipôles. Il vient

$$I_0 U(t) = R i_\mathrm{R}(t)^2 + L i_\mathrm{L}(t)\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} \ .$$

On reconnaît $L i_\mathrm{L}(t)\dfrac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}L i_\mathrm{L}^2(t)\right)$.

On reconnaît donc au final

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{G}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}(t)} \tag{4.6}$$

avec $\mathcal{E}_\mathrm{L}(t)$ l'énergie magnétique stockée dans la bobine et $\mathcal{P}_\mathrm{J}(t)$ la puissance stockée par effet Joule.

La puissance fournie par le générateur est donc en partie transférée sous forme énergie stockée dans la bobine et en partie dissipée par effet Joule dans la résistance du circuit.

On peut alors calculer les différents termes énergétiques.

▷ L'énergie stockée dans la bobine vaut

$$\Delta\mathcal{E}_\mathrm{L} = \mathcal{E}_\mathrm{L}(t = +\infty) - \mathcal{E}_\mathrm{L}(0) = \frac{1}{2}LI_0^2 \ .$$

▷ L'énergie fournie par le générateur vaut

$$W_\mathrm{G} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ I_0 U(t) = I_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = LI_0 \left[i_\mathrm{C}(t)\right]_0^{+\infty} = LI_0^2 \ .$$

▷ L'énergie dissipée par la résistance vaut, en utilisant le bilan de puissance,

$$W_\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathcal{P}_\mathrm{J}(t) = W_\mathrm{G} - \Delta\mathcal{E}_\mathrm{L} = \frac{1}{2}LI_0^2 \ .$$

À nouveau, de façon intrinsèque au phénomène de stockage de l'énergie, la moitié de l'énergie fournie est perdue par effet Joule.

Références

[1] http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Transitoire/Condensateur_flash.php