

Table des matières

1	La loi de Coulomb	1
2	Le potentiel électrostatique	3
2.1	Circulation d'un champ vectoriel	3
2.2	Opérateur gradient	3
2.3	Potentiel électrostatique créé	4
2.4	Énergie électrostatique	5
2.5	Cartes de champ et de potentiels	6
3	Le dipôle électrostatique	6
3.1	Présentation	6
3.2	Calcul du potentiel du dipôle	7
3.3	Calcul du champ électrique	8
3.4	Action mécanique d'un champ uniforme sur un dipôle	9
3.5	Action mécanique d'un champ non uniforme sur un dipôle	10
3.6	Applications aux molécules	11

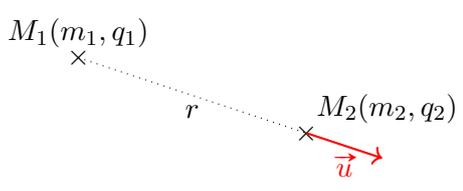
Dans tout ce chapitre, nous considérons des charges **statiques**.

1 La loi de Coulomb

Définition. La **loi de Coulomb** donne l'expression de la **force électrostatique** qu'une particule 1 de charge q_1 exerce sur une autre particule 2 de charge q_2 dans le vide. Elle vaut

$$\vec{F}_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

avec ϵ_0 la permittivité électrique du vide, r la distance entre les deux particules et \vec{u} le vecteur unitaire placé sur la particule 2, dirigé selon l'axe reliant les deux particules et orienté à l'opposé de la première particule.



Ainsi, deux particules de charges de même signe se repoussent tandis que deux charges de signes opposés s'attirent.

Définition. On définit $\vec{F}_E = q_2 \vec{E}$ avec

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

le **champ électrostatique** créé par la charge q_1 au point où se trouve la charge q_2 .

De prime abord, on peut être tenté de voir dans \vec{E} qu'un simple intermédiaire de calcul permettant de retrouver la force électrostatique. Il n'en est rien, l'idée est beaucoup plus forte. L'introduction du champ \vec{E} tend à substituer à la notion d'action à distance entre les charges q_1 et q_2 la notion d'action locale. Autrement dit, on attribue la force s'exerçant sur q_2 à l'existence d'un champ \vec{E} au point M_2 où se trouve la charge q_2 , ce champ étant créé par la charge q_1 . La justification de ce concept de champ est liée au

fait expérimental que sa connaissance locale, en une région de l'espace, suffit à décrire entièrement les phénomènes électrostatiques qui s'y produisent, sans que l'on soit obligé de faire appel à la description détaillée des sources du champ. Autrement dit, des sources différentes, donnant dans une région de l'espace le même champ, produisent dans cette région les mêmes effets électrostatiques.

Principe de superposition : Considérons maintenant une charge q placée en un point M et se trouvant en présence d'autres charges q_i placées en des points M_i (où i désigne un indice permettant de numérotter les charges). Soit r_i la distance de M_i à M en \vec{u}_i le vecteur unitaire porté par M_iM et dirigé de M_i vers M .

On réalise la somme des forces appliquées sur q . Ainsi, la force s'exerçant sur la charge q est la somme de toutes les forces créées par toutes les charges, soit

$$\vec{F} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

soit simplement $\vec{F} = q\vec{E}$ avec

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i.$$

On remarquera que l'on a pu mettre la force \vec{F} sous la forme $q\vec{E}$, de sorte que le champ électrostatique s'introduit naturellement.

Propriété. Le **principe de superposition** indique que le champ total \vec{E} en M est la somme de tous les champs \vec{E}_i créés en M par les différentes charges q_i soit $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ avec $\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$.

Ordres de grandeurs :

Dans le tableau 1 sont regroupés des ordres de grandeurs des champs électrostatiques créés par divers dispositifs.

Système	Champ électrique crée (V/m)
Surface de la Terre	$\sim 10^2$
Orage	$\sim 10^4$
Charge ponctuelle de 1 C située à une distance d (en m)	$\sim \frac{10^{-9}}{d^2}$
Norme station téléphonie mobile	~ 50

Tab. 1 – Ordres de grandeurs du champ électrostatique.

2 Le potentiel électrostatique

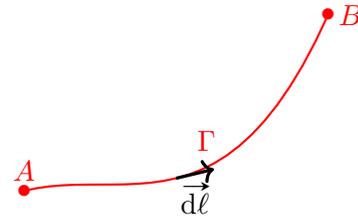
2.1 Circulation d'un champ vectoriel

Définition. La **circulation** d'un champ vectoriel \vec{a} le long d'une courbe orientée Γ (c'est-à-dire sur laquelle on a défini un sens positif) allant d'un point A à un point B est l'intégrale

$$C_{AB}^{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{\ell}$$

avec $d\vec{\ell}$ le vecteur infinitésimal tangent à Γ .

Si la courbe est **fermée**, on a $A = B$ et on note l'intégrale $C^{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{\ell}$.



Par définition, le travail d'une force vue en mécanique en première année correspond à une circulation.

Propriété. Les propriétés élémentaires de l'intégrale ont les conséquences suivantes :

- ▷ la circulation d'une somme de champ est la somme des circulations ;
- ▷ la circulation change de signe si l'on change le sens de parcours de Γ ;
- ▷ la circulation vérifie la relation $C_{AC}^{\Gamma_1 + \Gamma_2} = C_{AB}^{\Gamma_1} + C_{BC}^{\Gamma_2}$.

2.2 Opérateur gradient

Définition. On définit l'**opérateur gradient** en coordonnées cartésiennes d'une fonction $f(x, y, z)$ par

$$\vec{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \vec{e}_z$$

et en coordonnées cylindriques d'une fonction $f(r, \theta, z)$ par

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

Remarque : La définition complète de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques n'est pas à retenir à part pour le premier terme.

La notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ représente la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x . Autrement dit, il s'agit de signifier que la fonction f dépend de plusieurs variables et que la dérivée est réalisée en supposant que toutes les variables autres que x restent constantes.

Par exemple, pour $f(x, y) = yx^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2yx$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$.

Propriété. Le vecteur gradient d'une fonction en un point donné est dirigé en direction de l'augmentation la plus importante de la fonction.

Exemple 1 : Lorsque l'on skie, la piste pour aller le plus vite sera celle dirigée à l'opposé du gradient calculé localement.

Autrement dit, le gradient est dirigé là où les lignes de niveaux sont les plus rapprochées.

Définition. On appelle **différentielle** d'une fonction la grandeur df . Dans ce cas, par définition, on admet que l'on peut écrire

$$df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell}$$

avec $d\vec{\ell}$ le déplacement élémentaire.

Le gradient est donc une généralisation de la dérivée pour les fonctions de plusieurs variables. On a alors $\int_O^M df = f(M) - f(O)$. Le gradient permet ainsi de généraliser le développement limité d'ordre 1 sur des fonctions de plusieurs variables.

Propriété. Soit en un point M et de O , on a alors, au premier ordre en la distance OM , la relation

$$f(M) \approx f(O) + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(O).$$

Tout comme pour un développement limité d'une fonction d'une variable, cette relation s'applique si la distance OM est très petite devant la distance typique de variation de la fonction f . Cette relation se comprend car, si O et M sont suffisamment proche, on peut écrire $df = f(M) - f(O)$ et appliquer la définition de la différentielle.

L'opérateur nabla :

Définition. L'opérateur nabla, noté $\vec{\nabla}$ est un opérateur différentiel vectoriel. On a par définition

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Si on applique cette opérateur une fonction f , on a donc $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$.

On peut donc retenir formellement l'écriture $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** C'est un outil de calcul formel qui ne fonctionne qu'en coordonnées cartésiennes.

2.3 Potentiel électrostatique créé

Écrivons la circulation élémentaire du champ \vec{E} , on a

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{\ell}}{r^2}.$$

Si nous plaçons la charge q au centre d'un repère en coordonnées sphériques, le vecteur \vec{u} est le vecteur unitaire \vec{e}_r et $\vec{u} \cdot d\vec{\ell}$ le projeté du déplacement élémentaire dans cette direction, soit simplement dr .

De plus, on a $\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$. Ce calcul provient d'un changement de variable de l'intégrale soit un calcul sur l'élément différentiel de l'intégrale, ou plus simplement calcul différentiel, qui est un champ important d'étude en mathématique.

On a donc $dC = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right)$.

Définition. Le **potentiel électrostatique** $V(r)$ créé par une charge ponctuelle q à la distance r de celle-ci est

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + K$$

avec K une constante choisie en positionnant l'origine des potentiels.

Si l'on choisit l'origine des potentiels à l'infini, soit $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$, on a directement $K = 0$.

Dans ce cas, la circulation élémentaire du champ \vec{E} est définie par

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV.$$

On peut alors appliquer la définition de l'opérateur gradient.

Définition. Le **potentiel électrostatique** est lié au champ électrostatique par la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V.$$

Cette relation est vraie quelle que soit la source du champ statique \vec{E} .

On en déduit alors $C_{AB} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = -(V(B) - V(A)) = V(A) - V(B)$.

Propriété. La circulation entre deux points du champ électrostatique représente la différence de potentiel, ou tension, entre ces points, soit $C_{AB} = U_{AB}$.

Exemple 2 : Cette relation est vraie pour des champs créés par d'autres distributions que les charges ponctuelles. Ainsi, pour un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$, on a alors directement $E\vec{e}_x = -\frac{dV}{dx}$ soit $V(x) = -Ex + K$ avec K une constante. La circulation entre deux points $x = 0$ et $x = L$ est donc $V(x = L) - V(x = 0) = -EL$.

Si on calcule la circulation sur un contour fermé, on a alors $A = B$. La notation de l'intégrale est alors différente pour signifier ce fait.

Propriété. Le champ électrostatique est à **circulation conservative**. Ainsi, sur tout contour Γ fermé,

on a $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

2.4 Énergie électrostatique

Calculons la circulation élémentaire de la force électrostatique, on arrive par définition au travail élémentaire de celle-ci, soit $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = qdC = -d(qV)$.

Considérons une charge q_2 initialement au point A que l'on souhaite déplacer au point B . Par définition, l'énergie à fournir par un opérateur pour ce déplacement est l'opposé du travail de A à B soit $\mathcal{E}^{\text{op}} = -\int_A^B \delta W = -\int_A^B d(qV) = qV(B) - qV(A)$. Le travail ne dépend pas du chemin suivi, la force électrostatique est conservative. On rappelle d'ailleurs que, pour une force conservative, on a $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$.

Définition. L'énergie potentielle électrostatique est $\mathcal{E}_p = qV$.

Considérons une charge q_2 située à l'infini de la charge ponctuelle q source du champ \vec{E} située au point O . L'énergie à fournir par un opérateur pour approcher q_2 au point M , situé à la distance r de q est

$$\mathcal{E}^{\text{op}} = -W_{+\infty \rightarrow M} = -\int_{+\infty}^M \delta W = +\int_{+\infty}^M d(q_2V) = q_2(V(r) - V(+\infty)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q}{r}.$$

Cette énergie diverge si r est nul. En effet, si les charges sont de même signes, l'énergie potentielle diverge positivement, il s'agit d'un mur de potentiel infranchissable car les charges se repoussent. Si les charges sont de signes opposés, l'énergie potentielle diverge négativement, il s'agit d'un puits de potentiel infini car les charges s'attirent et ne s'arrêteront que lorsqu'elles seront en contact.

Remarque : Dans ce raisonnement, q est fixe donc son champ est statique. Par contre q_2 est a priori mobile donc son champ n'est pas statique. Les résultats du cours ne s'appliquent donc pas au champ créé par q_2 . Mais l'existence du champ local \vec{E} créé par q permet de ne pas avoir à considérer ce problème en s'affranchissant de la symétrie entre les charges q et q_2 .

Définition. L'énergie électrostatique totale d'un système de N particules est la somme de toutes les énergies des particules deux à deux

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

avec r_{ij} la distance entre les particules i et j .

| **Remarque :** Le facteur $1/2$ permet de ne pas compter deux fois les interactions $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow i$

On a vu en première année qu'un système cherche à minimiser son énergie potentielle pour gagner en stabilité. On en déduit la propriété suivante.

Propriété. La géométrie la plus stable d'une distribution de charge est celle qui **minimise** l'énergie électrostatique totale du système.

2.5 Cartes de champ et de potentiels

Définition. Le tracé des lignes de champ permet d'établir l'allure générale du champ électrique dans une région donnée de l'espace. La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point.

Un tube de champ est l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé C .

Pour tracer convenablement les lignes de champ, certaines règles s'appliquent :

- ▷ Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives ;
- ▷ Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges ;
- ▷ Les lignes de champ ne doivent pas se croiser en dehors des charges ;
- ▷ Plus les lignes de champ sont resserrées, plus le champ est fort.

Définition. Une surface équipotentielle est une surface telle que le potentiel V est identique en tout point.

Or on a vu que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Ainsi, si le potentiel est constant $dV = 0$ et si $d\vec{\ell}$ est sur une ligne équipotentielle, alors le champ lui est orthogonal.

Propriété. Les surfaces équipotentielles $V = \text{Cte}$ sont orthogonales aux lignes de champ.

Ce résultat provient de l'interprétation du gradient. Les équipotentielles sont des lignes de niveau et, leur gradient (l'opposé du champ), est dirigé dans la direction de leur variation la plus rapide. Le champ électrique est donc dirigé vers la diminution la plus rapide du potentiel.

Pour tracer des lignes de champ et de potentiel, on peut utiliser [cette animation](#) [1]. Quelques cartes sont tracées figure 1.

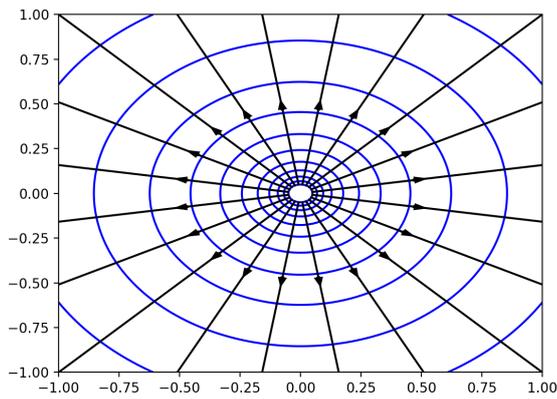
3 Le dipôle électrostatique

Cette partie va sembler, de prime abord, être un exercice de calcul formel d'un champ. Toutefois, la notion de dipôle est fondamentale pour rendre compte des propriétés de la matière. Sans prétendre faire le tour de la question, signalons que la notion de moment dipolaire intervient dans des domaines apparemment aussi variés que l'interprétation des propriétés des matériaux isolants et celle de certains mécanismes de réaction en chimie organique.

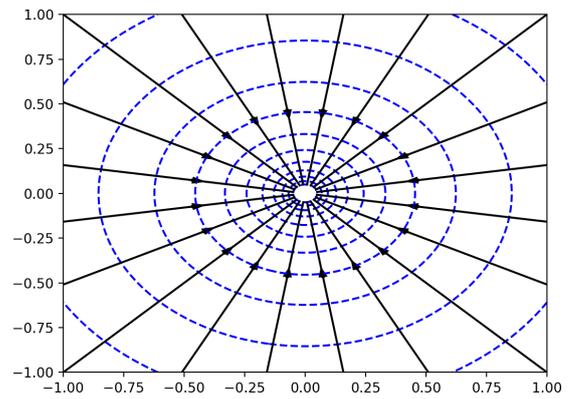
3.1 Présentation

Définition. On appelle **dipôle électrostatique** le système constitué par deux charges opposées $-q$ et $+q > 0$ placée respectivement en deux points N et P . On appelle **moment du dipôle** le vecteur \vec{p} défini par

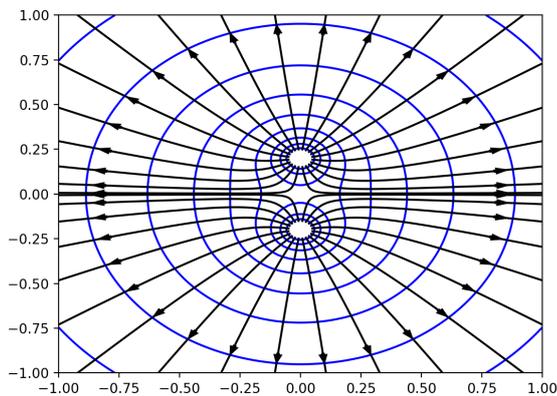
$$\vec{p} = q\overline{NP}$$



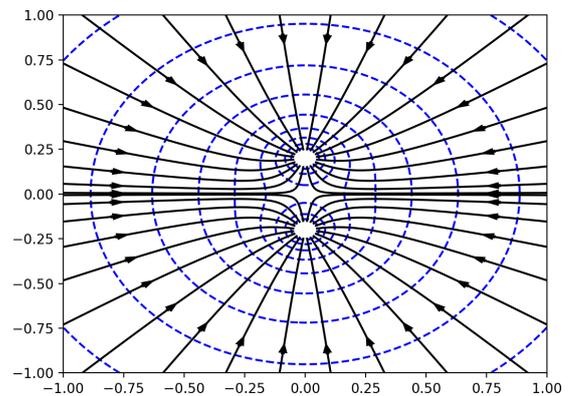
(a) Charge positive.



(b) Charge négative.



(c) Deux charges positives.



(d) Deux charges négatives.

Fig. 1 – Cartes du champ électrique (en noir, orienté par les flèches) et des équipotielles (en bleu, courbes fermées continues pour les potentiels positifs ou en pointillés pour les potentiels négatifs).

Le système est invariant par rotation autour de l'axe \overrightarrow{NP} , on étudie donc le système dans un des plans contenant ce vecteur en coordonnées polaires comme décrit figure 2.

Définition. L'approximation dipolaire consiste à supposer que la distance $a = NP$ est négligeable devant toutes les autres distances considérées.

Dans ce cadre, on n'étudiera les champs et les potentiels que loin du dipôle.

3.2 Calcul du potentiel du dipôle

Par définition, on a au point M

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right).$$

Au premier ordre, on a $PM = NP \approx r$, soit un champ nul. Cette approximation est trop forte mais permet de mettre en avant le fait que le champ sera très faible. En effet, les charges se compensent et, à grande distance, tout se passe comme s'il n'y avait pas de charge.

Propriété. À grande distance d'un ensemble de charge électriquement neutre, les champs se compensent et le champ résultant est nul. On parle d'écrantage des charges.

C'est pour cette raison que les effets du champ électrostatique sont négligeables à l'échelle macroscopique, malgré le fait que la matière est composée de particules chargées.

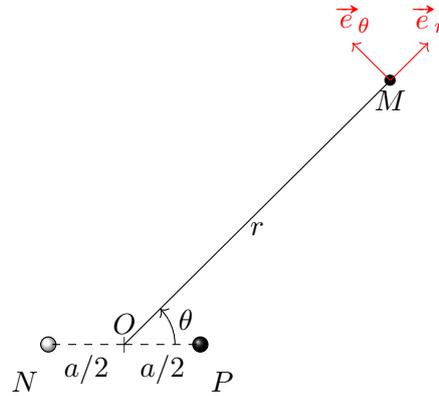


Fig. 2 – Notations utilisées pour décrire un dipôle électrostatique.

Pour voir la dépendance du potentiel en la distance et l'angle, il faut aller à l'ordre supérieur. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}
 PM &= \|\vec{PO} + \vec{OM}\| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM} + r^2}; \\
 &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar \cos \theta + r^2}; \\
 &= r \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Or, dans le cadre de l'approximation dipolaire, on a $a \ll r$. En ne conservant que le premier ordre en a/r , il vient donc $PM \approx r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$.

De même, on montre que $NM \approx r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$.

Ainsi, on calcule au premier ordre en a/r la différence

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} &\approx \frac{1}{r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)} - \frac{1}{r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)}; \\
 &\approx \frac{1}{r} \left(\left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right) \right); \\
 &\approx \frac{1}{r} \frac{a}{r} \cos \theta.
 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du potentiel, en reconnaissant $p = qa$,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

avec $r \vec{e}_r = \vec{OM}$.

On constate que le champ est en $1/r^2$ alors que celui d'une charge seule est en $1/r$. Ainsi, le champ d'un dipôle est négligeable à grande distance devant celui d'une charge seule. On retrouve bien le phénomène d'écrantage.

3.3 Calcul du champ électrique

Par définition, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. On constate que V ne dépend que de r et de θ , ainsi le vecteur \vec{E} sera compris dans le plan de la figure 2.

On a donc

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V(r, \theta) = -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta ; \\ &= -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \right) \vec{e}_r - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta ;\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta}.$$

Remarque : On peut reconnaître alors $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p})$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

La carte de champ et de potentiel du dipôle électrostatique est tracée figure 3.

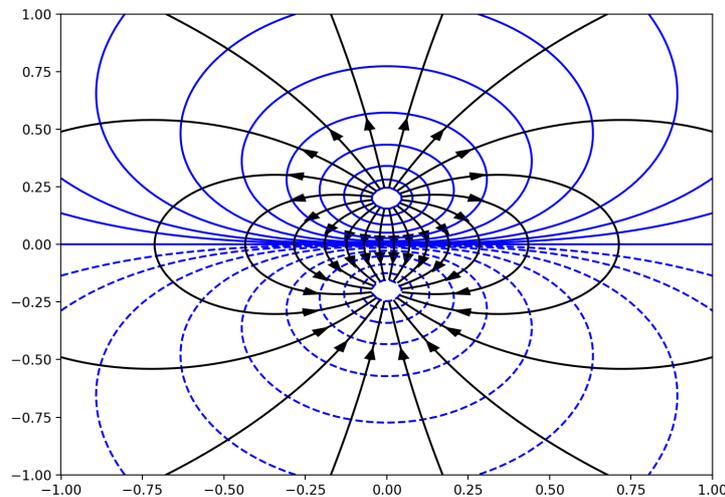


Fig. 3 – Cartes du champ électrique (en noir, orienté par les flèches) et des équipotentielles (en bleu, courbes fermées continues pour les potentiels positifs ou en pointillés pour les potentiels négatifs) du dipôle. La charge positive est en haut et la charge négative en bas.

3.4 Action mécanique d'un champ uniforme sur un dipôle

Considérons un dipôle constitué par deux charges $-q$ et $+q$ placées en N et P . Ce dipôle est plongé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 . L'action mécanique de ce champ sur le dipôle est caractérisé par la force \vec{F} et le moment $\vec{\Gamma}_O$ (avec O le milieu de NP). Les actions mécaniques sont représentées sur le schéma figure 4.

De façon directe, on a $\vec{F} = +q\vec{E}_0 - q\vec{E}_0 = \vec{0}$. La force résultante est nulle, le centre de masse du dipôle est donc immobile. Le moment est donc un couple de forces.

Le moment est donné par

$$\vec{\Gamma}_0 = \overrightarrow{ON} \wedge (-q\vec{E}_0) + \overrightarrow{OP} \wedge (q\vec{E}_0) = \overrightarrow{NP} \wedge q\vec{E}_0.$$

Propriété. Un dipôle $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ plongé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 subi un couple de force de moment $\boxed{\vec{\Gamma}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}_0}$ avec O le centre du segment NP .

Nous avons vu précédemment que la position d'équilibre d'un ensemble de charge est celle qui minimise son énergie potentielle électrostatique. Notons V le potentiel tel que $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. Si nous plaçons l'axe des x tel que $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$, il vient directement $V = -E_0 x$ en prenant la constante nulle en O pour $x = 0$.

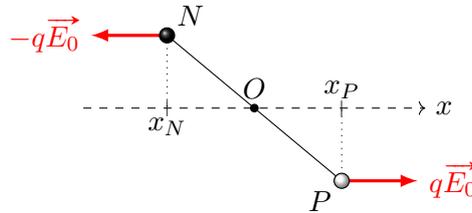


Fig. 4 – Action mécanique subie par un dipôle électrostatique plongé dans un champ extérieur uniforme.

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique du dipôle est donc

$$\mathcal{E}_P = qV(P) - qV(N) = q(V(P) - V(N)) = -qE_0(x_P - x_N).$$

Par définition de l'axe \vec{e}_x , $x_P - x_N$ est la projection de la distance entre P et N le long de l'axe \vec{e}_x comme représenté figure 4. On en déduit $E_0(x_P - x_N) = \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{NP}$.

Propriété. L'énergie potentielle d'interaction électrostatique du dipôle soumis à un champ extérieur uniforme est $\mathcal{E}_P = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$.

On constate que le couple $\vec{\Gamma}_0$ est nul lorsque \vec{p} et \vec{E}_0 sont alignés. Dans ce cas, l'énergie potentielle d'interaction est extrémale. S'ils sont parallèles, l'énergie potentielle est minimale et la position d'équilibre est stable tandis que, s'ils sont anti-parallèle, l'énergie potentielle est maximale et la position d'équilibre est instable comme représenté figure 5. Le dipôle s'oriente donc avec le champ.



Fig. 5 – Positions d'équilibre d'un dipôle électrostatique plongé dans un champ extérieur uniforme : le couple tend à aligner le dipôle avec le champ. Si ceux-ci sont parallèles mais de directions opposés, la position d'équilibre est instable car une petite perturbation tend à lui faire quitter cette position.

3.5 Action mécanique d'un champ non uniforme sur un dipôle

Supposons cette fois que le dipôle est soumis à un champ \vec{E} non uniforme sur son échelle. On a $\vec{E}(P)$ et $\vec{E}(N)$ qui sont donc différents. Toutefois, dans le cadre de l'approximation dipolaire, la distance entre les deux charges est nécessairement petite devant les variations importantes du champ.

Concernant le moment, on a

$$\vec{\Gamma}_0 = \overrightarrow{ON} \wedge (-q\vec{E}(N)) + \overrightarrow{OP} \wedge (q\vec{E}(P)).$$

Or dans le cadre de l'approximation dipolaire, au premier ordre en tout cas, on a $\vec{E}(N) \approx \vec{E}(P) \approx \vec{E}_O$.

Propriété. Un dipôle $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ plongé dans un champ extérieur non uniforme \vec{E} subit un couple de force de moment $\vec{\Gamma}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}_O$ avec \vec{E}_O le champ au centre O du dipôle.

Remarque : Cette expression, comme les suivantes, est vraie uniquement au premier ordre en la distance NP . Cela implique d'être toujours dans l'approximation dipolaire pour utiliser cette relation.

Regardons ce qu'il se passe sur le potentiel V du champ extérieur. Dans le cadre de l'approximation dipolaire, on peut réaliser un développement limité de celui-ci. Au premier ordre en NP , on a $V(P) \approx V(N) + \overrightarrow{NP} \cdot \text{grad } V$.

Ainsi l'énergie potentielle d'interaction électrostatique du dipôle vaut

$$\mathcal{E}_p = qV(P) - qV(N) = q(V(P) - V(N)) \approx q\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = -q\overrightarrow{NP} \cdot \vec{E}.$$

Propriété. L'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle électrostatique $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ et un champ non uniforme vaut $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_O$ avec \vec{E}_O le champ au centre O du dipôle.

On déduit des expressions du couple et du potentiel que le dipôle tend à s'aligner avec le champ \vec{E}_O , comme dans le cas du champ uniforme. Ainsi, si un dipôle est soumis à un champ extérieur uniforme ou de variations spatiales lentes sur l'échelle de la taille de du dipôle, alors on peut considérer que le champ est localement uniforme sur celui-ci.

Propriété. Un dipôle électrostatique $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ soumis à un champ extérieur \vec{E} s'oriente sur les lignes de champ de celui-ci.

Pour calculer la force subie par le dipôle, on utilise la relation

$$\vec{F} = q\overrightarrow{E}(P) - q\overrightarrow{E}(N) = -q\overrightarrow{\text{grad}} V(P) + q\overrightarrow{\text{grad}} V(N) = -\overrightarrow{\text{grad}} (q(V(P) - V(N))) = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p.$$

Propriété. La force subie par un dipôle $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ soumis à un champ non uniforme \vec{E} vaut $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E}_O)$ avec \vec{E}_O le champ au centre O du dipôle.

Les propriétés mathématique du gradient impliquent donc que la force est dirigée vers les zones où la quantité $\vec{p} \cdot \vec{E}_O$ est maximale. Ainsi, la force tend à :

- ▷ aligner le dipôle avec le champ ;
- ▷ diriger le dipôle vers les zones de champs forts.

Cet effet est schématisé figure 6.

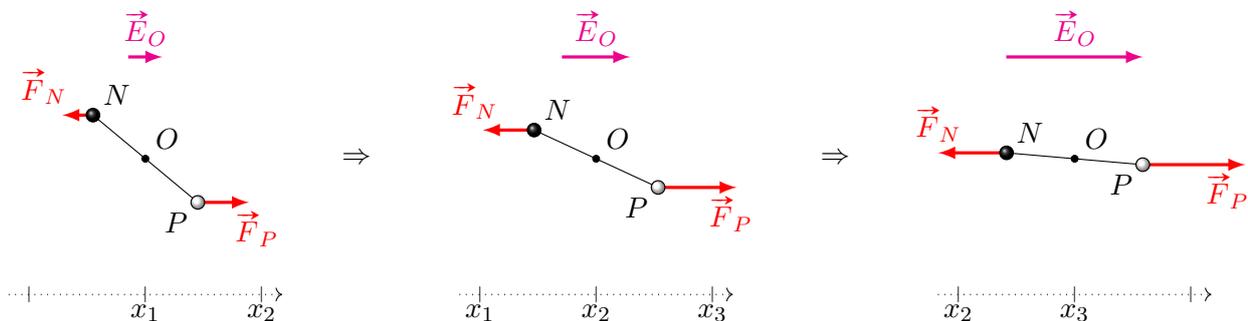


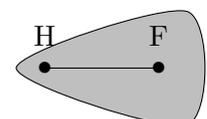
Fig. 6 – Action mécanique subie par un dipôle électrostatique plongé dans un champ extérieur non uniforme. Le dipôle s'oriente avec le champ puis, comme la norme de la force sur la charge positive est plus importante que la norme de la force sur la charge négative, le dipôle se dirige vers les zones de champ fort.

3.6 Applications aux molécules

Dans une liaison covalente, les électrons ne sont pas répartis de manière équitable entre les deux atomes. Par exemple, dans la molécule HF, les électrons de la liaison sont davantage situés sur l'atome de fluor car il est plus électronégatif que l'atome d'hydrogène. Le nuage électronique a l'allure ci-dessous.

On rappelle que l'électronégativité, grandeur sans dimension, notée χ , caractérise la tendance d'un élément à attirer les électrons dans une liaison chimique. Plus χ est grand, plus les électrons auront tendance à se rapprocher de l'élément lors de la création d'une liaison chimique avec un autre élément.

Pour quantifier, cet effet, on introduit le **pourcentage d'ionicté de liaison** noté δ . Dans HF, l'hydrogène H porte donc en réalité une charge $\delta_+ = \delta e$ (où e est la charge élémentaire) et le fluor F une charge $\delta_- = -\delta_+$. On a bien entendu $\delta_+ + \delta_- = 0$.



Le moment dipolaire est donc $\vec{\mu} = \delta_+ \overrightarrow{FH} = \delta e \overrightarrow{FH}$.

Propriété. Dans une liaison covalente entre N et P , si $\chi(N) > \chi(P)$, la molécule est analogue à une charge $\delta_+ = \delta e$ placée en P et une charge $\delta_- = -\delta_+$ placée en N . Le moment dipolaire est donc

$$\vec{\mu} = \delta e \overrightarrow{NP}.$$

Le moment dipolaire s'exprime en $C \cdot m$ mais cette unité n'est pas adaptée à la chimie. On introduit donc le Debye D pour le mesurer tel que $1 D = 3.33 \times 10^{-30} C \cdot m$.

Définition. Le moment dipolaire $\vec{\mu}$ d'une molécule sera la somme des moments dipolaires $\vec{\mu}_i$ des liaisons

$$\vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i.$$

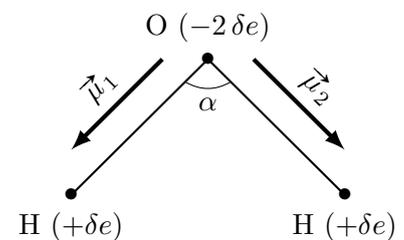
Une molécule possédant un moment dipolaire non nul ($\vec{\mu} \neq \vec{0}$) sera dite **polaire**. Une molécule possédant un moment dipolaire nul ($\vec{\mu} = \vec{0}$) sera dite **apolaire**.

Pour étudier le moment dipolaire d'une molécule, on néglige, en première approche, le moment dipolaire formé par la liaison $C - H$ ce qui revient à négliger la différence d'électronégativité entre C et H .

Propriété. Les molécules adoptent la géométrie qui minimise les interactions entre les charges de signes opposés. Cette configuration minimise l'énergie électrostatique des molécules.

La molécule BeH_2 est apolaire alors que H_2O est une molécule polaire. La géométrie de la molécule nous permet d'expliquer ce phénomène. En effet, l'eau est une molécule coudée alors que BeH_2 est une molécule linéaire. On peut donc calculer le moment dipolaire de l'eau.

La longueur de la liaison OH est $d = 95.8 \text{ pm}$, l'angle α vaut 104.5° et le pourcentage d'ionicité de la liaison OH est de $\delta = 33\%$. On a donc $\|\vec{\mu}_1\| = \|\vec{\mu}_2\| = \delta ed$.

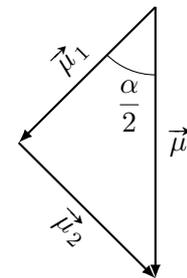


Le moment dipolaire de la molécule d'eau est donc

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{\mu}\| = 2\delta ed \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1.86 D.$$

On peut retenir l'ordre de grandeur du moment dipolaire de l'eau :

$$\mu_{H_2O} \sim 1 D.$$



Les molécules polaires souvent utilisées comme solvants sont : l'eau (H_2O), l'éther (aussi nommé éthoxyéthane $C_2H_5OC_2H_5$) ou le chloroforme (aussi nommé trichlorométhane $CHCl_3$).

Références

[1] https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/champE.php