EM 2

Sources continues du champ électromagnétique

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI*- 2022-2023

Table des matières

1 Description microscopique et mésoscopique des sources

1.1 Les distributions de charges

1.1.1 Distribution volumique de charges

Exprimée en Coulomb, la charge élémentaire e est très faible, elle vaut [1]

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \approx 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\,.$$

Ainsi, à l'échelle macroscopique, on ne s'aperçoit pas de la quantification de la charge, et la charge d'un corps chargé est décrite avec suffisamment de précision par une variable continue.

Définition. Considérons une petite portion mésoscopique d'un corps chargé, de volume $\Delta\tau$ très petit à l'échelle du corps, mais grand à l'échelle atomique entourant un point M. Cet élément de volume contient ainsi un grand nombre de particules chargées et sa charge totale est ΔQ. On appelle **densité volumique de charge** $\boxed{\rho = \Delta Q/\Delta\tau}$.

Nous admettrons que la quantité ρ ainsi définie ne dépend pas de la forme exacte du volume $\Delta\tau$ choisi pourvu qu'il définisse un volume mésoscopique permettant de négliger la quantification de la charge. On associe ainsi à un point M du corps la valeur ρ ; on obtient donc une fonction $\rho(M)$ qui sert à caractériser à l'échelle macroscopique la distribution volumique de charge.

La charge électrique totale est donc la somme de toutes les quantités locales de charges $\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}\tau$.

Définition. la charge électrique Q contenue dans un volume $\mathcal{V}$ quelconque est donnée par

$$\boxed{Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\mathrm{d}\tau}\,.$$

1. Cette valeur est exacte par décision du Bureau International des Poids et Mesures, pour plus de détails, voir le site `https://www.bipm.org/fr/measurement-units/si-defining-constants`.

Il est à noter qu'en général, la matière est électriquement neutre, donc la densité volumique de charge est nulle. Toutefois, ce n'est pas le cas de certains phénomènes, comme dans les phénomènes de type condensateur (naturel comme dans les orages ou artificiel en électrocinétique). Dans ce cas, la matière reste globalement neutre à grande échelle mais, localement, les charges positives et négatives sont séparées, ce qui induit une densité volumique de charges non nulle.

1.1.2 Distributions surfacique et linéique de charges

Considérons une plaque chargée, comme par exemple une armature d'un condensateur. Un tel dispositif peut être décrit par une plaque de surface S, d'épaisseur e et de densité volumique de charge ρ. Si on se place dans le cas où l'épaisseur e est très faible devant les dimensions de la plaque, les charges sont concentrées au voisinage d'une surface, c'est-à-dire réparties sur une épaisseur très faible vis-à-vis des dimensions du corps, on considérera que les charges sont réparties sur une surface. On peut alors modéliser cette situation par un plan infiniment fin portant une charge ΔQ par élément de surface ΔS.

Définition. La **densité surfacique** de charge, notée S représente la charge portée par un plan par unité de surface. La charge contenue Q sur une surface $\mathcal{S}$ est $\boxed{Q = \iint_{\mathcal{S}} S\mathrm{d}S}$.

Dans ce cas, on a $\sigma = \rho e$ avec e l'épaisseur de la plaque.

De même, si on considère un cylindre dont le rayon est très faible devant sa longueur, on peut le modéliser à grande distance par un fil de rayon nul. Celui ci porte une charge ΔQ par élément de longueur $\Delta \ell$.

Définition. La **densité linéique** de charge, notée λ représente la charge portée par un fil par unité de de longueur. La charge contenue Q sur un fil de longueur $\mathcal{L}$ est $\boxed{Q = \int_{\mathcal{L}} \lambda \mathrm{d}\ell}$.

Dans ce cas, on a $\lambda = \rho S$ avec S la surface transverse du cylindre.

Il faut bien voir que l'introduction d'une densité surfacique ou linéique n'est justifiée que pour décrire les effets qui se produisent à des distances grandes devant la taille caractéristique dans laquelle sont réparties les charges. Aussi, ces descriptions sont inadéquates pour les effets liés à l'interaction de ces charges entre elles. Il ne faudra pas alors hésiter à revenir, si nécessaire, à la densité volumique de charge qui, quoi que concentrée, est un modèle physique plus réaliste.

1.2 La distribution de courant

1.2.1 Rappel sur le courant et l'intensité du courant électrique

Définition. Le **courant électrique** correspond au déplacement d'ensemble de porteurs de charges mobiles.

L'intensité électrique du courant mesure le débit de charges à travers la section du conducteur, autrement dit la quantité de charge électrique qui traverse la surface transverse du conducteur par unité de temps. Par définition, le courant s'exprime donc en coulomb par secondes.

Définition. **L'intensité électrique** est la mesure de la quantité de charge δq qui traverse la section du conducteur pendant le temps infinitésimal $\mathrm{d}t$. Elle s'exprime en ampère (A). On note

$$\boxed{i(t) = \frac{\delta q}{\mathrm{d}t}(t)}.$$

La notation δ ou d est importante. On utilise δq car il s'agit d'une quantité qui est échangée dans le circuit tandis qu'on utilise $\mathrm{d}t$ car il s'agit de la variation d'une quantité.

Quantification de la charge et grandeurs électriques constantes : Dans le cas de grandeur constantes, en notant Q la charge totale qui parcourt le circuit pendant le temps Δt, on a $i = \dfrac{\delta q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{Q}{\Delta t}$.

| *Application 1 : Calculer le nombre d'électrons traversant le circuit sous 1 A pendant 1 s.*

Le nombre d'électrons en mouvement lors d'un courant électrique est tellement important que chaque électron individuel est très difficilement observable. Les grandeurs électrique macroscopiques peuvent donc être considérées comme continues malgré le fait qu'elles proviennent du mouvement de charges quantifiées.

1.2.2 Vecteur densité de courant

Vitesse de déplacement des porteurs de charges Considérons des électrons parcourant un conducteur traversé par un courant I constant. Ils se déplacent chacun à une vitesse v_i. On cherche à évaluer ce courant I en un point donné du circuit, pour lequel on note S la surface d'une section du conducteur.

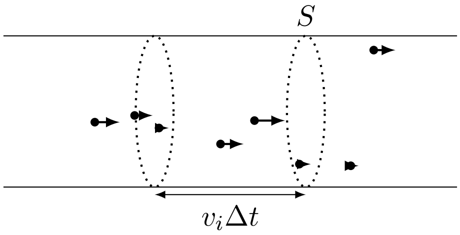


Fig. 1 – L'électron i travers S durant Δt si il est au maximum à la distance $v_i\Delta t$ de S.

On veut évaluer le courant moyen pendant le temps Δt.

Notons n_i le nombre de charge libres par unité de volume dans le conducteur allant à la vitesse v_i. Les charges de vitesse v_i traversant S pendant Δt sont au plus à une distance $\ell = v_i\Delta t$. Tous les électrons entre cette distance et la surface la traverseront pendant l'intervalle de temps considéré. La situation est représentée figure 1. Les électrons qui participent au courant sont donc ceux compris dans le cylindre de base S et de hauteur ℓ. Le volume de ce cylindre vaut $V_i = \ell S = v_i \Delta t S$.

Le nombre d'électrons à la vitesse v_i dans ce volume est $N_i = n_i V_i = n_i v_i \Delta t S$.

En sommant sur toutes les vitesses de charges possibles, on écrit $N = \sum_i n_i v_i = n\bar{v}$ avec $n = \sum_i n_i$ le nombre total de charges libres par unité de volume et $\bar{v} = \dfrac{1}{n}\sum_i n_i v_i$ la vitesse moyenne des charges libres.

La charge totale traversant S correspond à N multiplié par la charge élémentaire $-e$. On a ainsi $|Q| = enV = enS\bar{v}\Delta t$.

On sait que pour un courant constant, on a $I = \dfrac{Q}{\Delta t}$. On en déduit donc

$$\boxed{I = enS\bar{v}}\ .$$

Dans le cuivre, on a $n \approx 8 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ soit $\bar{v} \approx 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/s}$. Cette valeur est inférieure au dixième de millimètre par seconde, elle est extrêmement faible.

On retiendra que les porteurs de charges dans un fil électrique se déplacent très peu. Il faut considérer le circuit comme une grande chaîne, même si chaque chaînon se déplace très lentement, dès qu'une extrémité se met en mouvement, l'autre extrémité va quasiment instantanément suivre ce mouvement. Le déplacement global est donc une grandeur physique qui se déplace très vite.

Ce déplacement global est porté par une onde électromagnétique, se traduisant par une onde de courant et une onde de potentiel. Cette onde porte l'énergie et se déplace à une fraction de la vitesse de la lumière.

Définition du vecteur densité de courant

Définition. On définit le **vecteur densité de courant** $\vec{j}$

$$\boxed{\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_{\mathrm{m}}\vec{v}}$$

avec $\rho_{\mathrm{m}} = nq$ la densité volumique de charges mobiles, n étant la densité volumique de charges libres et q la charge d'un porteur de charge. Le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur vitesse moyen des porteurs de charges.

Il ne faut pas confondre ρ_{m} et ρ. La densité volumique de charge est souvent nulle car la matière est électriquement neutre alors que la densité volumique de charges libres n'est pas nul dès que des charges peuvent être mises en mouvement, ce qui est très souvent le cas.

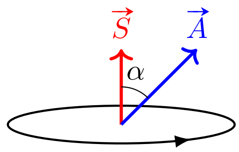
1.2.3 Intensité et vecteur densité du courant

Flux d'un vecteur :

Définition. Soient S une surface plane (de surface S) fixe s'appuyant sur un contour orienté (par la règle de la main droite) et un champ vectoriel magnétique traversant cette surface dépendant éventuellement du temps $\vec{A}(t)$.
Le **flux du champ vectoriel** à travers cette surface est la grandeur scalaire

$$\boxed{\Phi(t) = \iint_S \vec{A}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}} \,.$$

Si le champ est **uniforme** (c'est-à-dire qu'il ne varie pas en se déplaçant sur la surface S), alors il vient simplement $\Phi(t) = \vec{S} \cdot \vec{A}(t) = SA(t) \cos\alpha$.



Définition du courant : Dans le calcul précédent, on constate que $I = |\vec{j}|S$.

Définition. L'intensité d'un courant électrique traversant une surface S est le flux du vecteur densité de courant

$$\boxed{I(t) = \iint_S \vec{j}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}} \,.$$

2 Principe de la conservation de la charge

2.1 Cas d'un système unidimensionnel

Considérons une portion d'un conducteur linéaire de surface transverse S. Considérons une portion de conducteur infinitésimale comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ comme représenté figure 2.

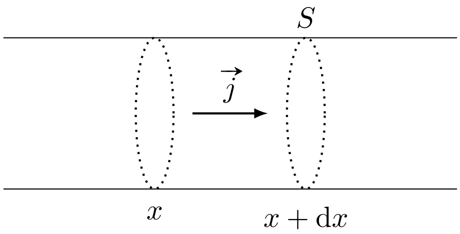


Fig. 2 – Portion de conducteur unidimensionnelle comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$.

Notons $Q(t)$ la charge présente dans cette portion de conducteur à l'instant t et étudions la variation de celle-ci entre t et $t+\mathrm{d}t$. Comme il n'y a pas de création ou destruction de charges, la variation de celle-ci correspond à la différence entre celles entrante et sortante aux interfaces. On a donc

$$Q(t + \mathrm{d}t) - Q(t) = \delta Q_{\text{entrante}} - \delta Q_{\text{sortante}} \,.$$

Par définition du courant, on a $\delta Q = I\Delta t = jS\mathrm{d}t$, il vient que la variation de charge correspond à la différence de flux entrant et sortant du vecteur densité de courant, soit

$$\delta Q_{\text{entrante}} - \delta Q_{\text{sortante}} = j(x)S\mathrm{d}t - j(x + \mathrm{d}x)S\mathrm{d}t \,.$$

De plus, par définition de la charge contenue dans le volume, on a $Q(t) = \rho(t)S\mathrm{d}x$. Enfin, on a donc

$$Q(t + \mathrm{d}t) - Q(t) = \rho(t + \mathrm{d}t)S\mathrm{d}x - \rho(t)S\mathrm{d}x \ .$$

On rappelle la règle de calcul différentiel, similaire au calcul d'un développement limité d'ordre 1, $f(y + \mathrm{d}y) = f(y) + f'(y)\mathrm{d}y$. Cette égalité est vraie à l'ordre 1.

En appliquant cette règle aux deux différences précédentes, il vient

$$\begin{aligned}(\rho(t + \mathrm{d}t) - \rho(t))S\mathrm{d}x &= (j(x) - j(x + \mathrm{d}x))S\mathrm{d}t \\ \frac{\partial \rho}{\partial t}(t)S\mathrm{d}t\mathrm{d}x &= -\frac{\partial j}{\partial x}(x)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t \ .\end{aligned}$$

En simplifiant par $\mathrm{d}t\mathrm{d}x$, il vient l'équation de **conservation de la charge unidimensionnelle**, soit la relation

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(t) = -\frac{\partial j}{\partial x}(x)} \ .$$

2.2 Divergence d'un vecteur

Considérons maintenant un système cubique infinitésimal à trois dimensions. Ce système est compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, y et $y + \mathrm{d}y$ et z et $z + \mathrm{d}z$.

La dérivée de la charge contenue dans ce système correspond donc au flux sortant du vecteur densité de courant $\vec{j}$ sur chacune de ces six faces comme représenté figure 3. Il s'agit bien du flux sortant, nous comptons positivement lorsque $\vec{j}$ est orienté vers l'extérieur et négativement si il est orienté vers l'intérieur.

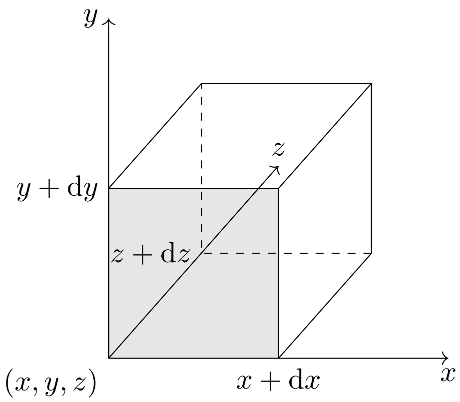


Fig. 3 – Calcul du flux vectoriel sur un élément de volume infinitésimal.

Le système étant infinitésimal, on peut supposer que le vecteur densité de courant est uniforme sur chaque face. Par exemple, sur la face grisée de la figure 3, on considère que le vecteur $\vec{j}$ est uniforme et vaut $\vec{j}(x, y, z)$. Le flux sortant correspond au flux orienté selon $-\vec{e}_z$ et la surface grisée vaut $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, le flux élémentaire sur cette face est donc

$$\vec{j}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y(-\vec{e}_z) = -j_z(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où j_z est la composante z du vecteur $\vec{j}$.

Sur la face opposée à la face grisée, le vecteur surface est toujours de norme $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ mais est orienté cette fois selon $+\vec{e}_z$. Le vecteur $\vec{j}$ est uniforme et vaut $\vec{j}(x, y, z + \mathrm{d}x)$. Le flux élémentaire sur cette face vaut maintenant

$$\vec{j}(x, y, z + \mathrm{d}z) \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y(+\vec{e}_z) = +j_z(x, y, z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

En ajoutant ces deux composantes, on a

$$(-j_z(x, y, z) + j_z(x, y, z + \mathrm{d}z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial j_z}{\partial z}(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

En reproduisant cette opération sur chaque couple de faces, il vient le flux élémentaire sortant

$$\mathrm{d}\Phi = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial j_y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial j_z}{\partial z}(x,y,z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

Définition. On définit l'opérateur vectoriel divergence appliqué à un champ vectoriel $\vec{j}$ en coordonnées cartésiennes par

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}}\ .$$

L'expression en coordonnées cartésiennes est à connaître. En coordonnées cylindrique, la divergence vaut

$$\operatorname{div}\vec{j} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rj_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\ .$$

En coordonnées cartésiennes, on peut réutiliser l'opérateur nabla vu dans la définition du gradient. On a en effet $\boxed{\operatorname{div}\vec{j} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}}$.

On a alors $\mathrm{d}\Phi = (\operatorname{div}\vec{j})\mathrm{d}V$ avec le volume infinitésimal $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Ainsi, la divergence porte bien son nom. Si le champ vectoriel diverge d'un point, il sort du volume qui entoure ce point et son flux du champ $\mathrm{d}\Phi$ autour de ce point sera grand, tout comme sa divergence.

Propriété. La divergence d'un champ vectoriel en un point multiplié par le volume infinitésimal autour de celui-ci représente le flux sortant à travers la surface infinitésimale autour de ce point.

2.3 Généralisation

À l'aide de l'opérateur divergence, la généralisation de l'équation de la conservation de la charge unidimensionnelle est immédiate. En effet, par définition, la charge contenue à un instant donné est égal à la charge un peu plus tard plus ce qui est parti, soit

$$Q(t) = Q(t+\mathrm{d}t) + (\operatorname{div}\vec{j})\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

et donc

$$-(\operatorname{div}\vec{j})\mathrm{d}V\mathrm{d}t = Q(t+\mathrm{d}t) - Q(t) = (\rho(t+\mathrm{d}t)-\rho(t))\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t\ .$$

Définition. L'équation locale de conservation de la charge est

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}\ .$$

En régime stationnaire, la densité de charge est constante est donc $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

> ***Remarque :*** *Ce type de relation se généralise à la variation temporelle de n'importe quelle grandeur avec son vecteur densité associé.*

Dans un circuit électrique dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires [2], la charge électrique est constante, elle ne peut pas s'accumuler dans un fil. Ainsi, nous avons $\operatorname{div}\vec{j} = 0$. Dans ce cas, par définition de la divergence, si nous considérons le volume élémentaire compris autour d'un nœud d'un circuit électrique, le flux du vecteur densité de courant est nul sur celui-ci. Autrement dit, le flux entrant de $\vec{j}$ est égal au flux sortant de $\vec{j}$. Or, ces flux sont simplement des courants, on retrouve donc la loi des nœuds vue en électrocinétique de première année.

2. ARQS : voir le cours de première année.

3 Conduction électrique dans un conducteur ohmique

3.1 Loi d'Ohm locale

3.1.1 Le modèle microscopique de Drude

Seulement trois ans après la découverte de l'électron par J. J. Thomson en 1897, P. Drude a développé un modèle pour décrire la conduction d'électricité et de chaleur dans les métaux. Le modèle se base sur quatre hypothèses fondamentales.

▷ **Électrons indépendants et libres.** Cela veut dire que les électrons n'intéragissent pas entre eux et que leur mouvement, entre deux collisions successives avec les noyaux atomiques qui composent le solide, est décrit par les lois de Newton pour une particule libre.

▷ **Collisions instantanées.** Drude introduit l'interaction entre électrons et ions sous forme de collisions ayant une durée infinitésimale, qui changent la vitesse d'un électron au cours de son mouvement. Dans l'idée originale les électrons sont sujets à des collisions mécaniques avec les ions du solide. On sait aujourd'hui que, pour un solide cristallin sans défauts, le théorème de Bloch implique que les électrons se propagent comme des particules libres et conservent leur impulsion initiale en l'absence de forces externes. Toutefois, des mécanismes de collision (avec défauts, impuretés, phonons, etc.) ont toujours lieu dans un solide et on peut s'imaginer les collisions introduite par Drude comme étant une description phénoménologique de ces processus.

▷ **Temps de relaxation.** Un électron subit une collision avec une probabilité par unité de temps $1/\tau$. Cette probabilité ne dépends pas de la position et de la vitesse de l'électron. Le temps τ est appelé temps de relaxation.

▷ **Chaos moléculaire**. La direction et la vitesse qui caractérisent un électron après une collision ne sont pas corrélées aux quantités respectives avant la collision. En particulier, la direction après une collision est supposée aléatoire.

Considérons le vecteur impulsion $\vec{p} = m_\mathrm{e} < \vec{v} >$ moyen. Par définition du modèle, pendant le temps $\mathrm{d}t$, chaque électron a une probabilité $\mathrm{d}t/\tau$ d'entrer en collision avec un défaut du réseau. On a alors

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) = \frac{\mathrm{d}t}{\tau}\vec{p}_\mathrm{coll}(t+\mathrm{d}t) + \left(1-\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right)\vec{p}_\mathrm{non\ coll}(t+\mathrm{d}t)\ .$$

Au premier ordre en $\mathrm{d}t$, la relation

$$\vec{p}_i(t+\mathrm{d}t) = \vec{p}_i(t) + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \vec{p}_i(t) + \vec{F}_i\mathrm{d}t$$

avec $\vec{F}_i$ la force moyenne subie par les électrons en dehors des chocs, soit la partie électrique de la force de Lorentz $-e\vec{E}$.

Pour les électrons n'ayant pas subis de collision, la valeur précédente $\vec{p}_\mathrm{non\ coll}(t)$ est simplement la valeur du vecteur impulsion moyen $\vec{p}(t)$. Pour les électrons ayant subis une collision, selon le modèle de Drude, la valeur juste après la collision est aléatoire, donc $\vec{p}_\mathrm{coll}(t) = m_\mathrm{e} < \vec{v}_i >= \vec{0}$.

On a donc

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}e\vec{E}\mathrm{d}t + \left(1-\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right)\left(\vec{p}(t) - e\vec{E}\mathrm{d}t\right)\ ;$$

soit

$$\vec{F} = \frac{\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} - \frac{1}{\tau}\vec{p}(t)\ . \tag{3.1}$$

On constate l'apparition d'une force supplémentaire à la partie électrique de la force de Lorentz.

Propriété. Dans le modèle de Drude, l'effet du conducteur sur les charges est l'ajout, en plus de la partie électrique de la force de Lorentz, d'une force s'appliquant sur les charge de type « frottements fluide » $\vec{F} = -\vec{p}/\tau$.

3.1.2 Expression de la conductivité

Repartons de l'équation (3.1) et appliquons la seconde loi de Newton, il vient

$$m_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} - \frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\vec{v}$$

où $\vec{v}$ représente le vecteur vitesse moyen des électrons.

Passons en régime sinusoïdal forcé, il vient

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m_\mathrm{e}}\frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau+1}\vec{E}$$

soit

$$\vec{j} = \rho_\mathrm{m}\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m_\mathrm{e}}\frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau+1}\vec{E}\ .$$

Définition. La **loi d'Ohm locale** indique que, en régime sinusoïdal forcé, on a $\boxed{\vec{j} = \underline{\sigma}(\omega)\vec{E}}$ avec $\underline{\sigma}(\omega)$ la **conductivité** complexe du matériau $\underline{\sigma}(\omega) = \dfrac{\sigma_0}{\mathrm{j}\omega\tau+1}$ avec $\sigma_0 = \dfrac{\rho_\mathrm{m}\tau e}{m_\mathrm{e}}$ la conductivité statique (en Siemens par mètre $\mathrm{S\cdot m^{-1}} = \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}}$).
Pour les basses fréquences telles que $\omega\tau \ll 1$, on a la simplement $\boxed{\vec{j} = \sigma_0\vec{E}}$.
Aux hautes fréquences telles que $\omega\tau \gg 1$, on a la simplement $\boxed{\vec{j} = \vec{0}}$, le courant ne circule plus.

Pour le cuivre, on mesure expérimentalement $\tau = 2\times10^{-14}\,\mathrm{s}$ et $\sigma_0 = 58.7\times10^6\,\mathrm{S/m}$. Si les variations du champ, et donc de la tension, sont plus rapides que ce temps, le régime permanent n'a pas le temps de s'établir. Il faut donc travailler en dessous de $10^{14}\,\mathrm{Hz}$ pour pouvoir considérer le régime statique.

3.1.3 Expression de la résistance d'une portion de fil

Un fil de surface S et de longueur L. Celui-ci est soumis à une différence de potentiel U entre ses deux extrémités.

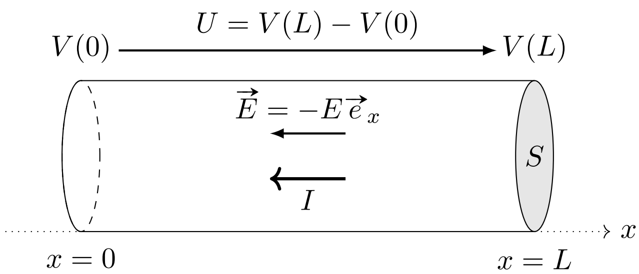


Fig. 4 – Schéma d'un conducteur linéaire pour calculer se résistance en convention récepteur.

Par définition du potentiel avec les notations du schéma 4, on a $U = V(L) - V(0) = \int_0^L \mathrm{d}V = \int_0^L \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_0^L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = E\int_0^L \mathrm{d}x = EL$.

Par ailleurs, le vecteur densité de courant vaut, à suffisamment faible fréquence, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Son flux à travers le conducteur vaut $I = \vec{j}\cdot\vec{S} = \sigma ES$ avec $\vec{S} = -S\vec{e}_x$. En effet, on mesure le courant en convention récepteur soit dans le sens opposé à la différence de potentiel U.

Il vient donc $E = \dfrac{I}{\sigma S} = \dfrac{U}{L}$ soit la loi d'Ohm électrique $U = \dfrac{L}{\sigma S}I$.

Définition. La résistance électrique d'un fil de longueur L et de section S vaut $\boxed{R = \dfrac{L}{\sigma S}}$ avec σ la conductivité du matériau.

3.2 Loi de Joule locale

Considérons un volume $\mathrm{d}V$ contenant $n\mathrm{d}V$ électrons en mouvements avec n la densité numérique de charges libre. Dans ce volume mésoscopique, il vont à la vitesse moyenne $\vec{v} = -\dfrac{1}{ne}\vec{j}$.

La puissance infinitésimale transmise aux charges $\mathrm{d}\mathcal{P}$ par le travail de la force de Lorentz à toutes ces charges vaut alors

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = (\vec{F} \cdot \vec{v})\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V = \vec{E} \cdot \vec{j}\,\mathrm{d}V\ .$$

Cette puissance est transmise aux charges libres, donc à la matière.

Définition. La puissance volumique p_{L} transmise à la matière par un champ $\vec{E}$ vaut $\boxed{p_{\mathrm{L}} = \vec{j} \cdot \vec{E}}$.

Dans le cas d'un conducteur ohmique, la loi d'ohm locale implique $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Propriété. La puissance volumique p_{L} transmise à la matière par un champ $\vec{E}$ dans un conducteur ohmique de conductivité σ est donnée par la loi de Joule locale, soit $\boxed{p_{\mathrm{L}} = \sigma|\vec{E}|^2}$.

> ***Application 2 :*** *Montrer que la puissance totale fournie au conducteur est donnée par la loi de Joule $\mathcal{P} = U^2/R$.*