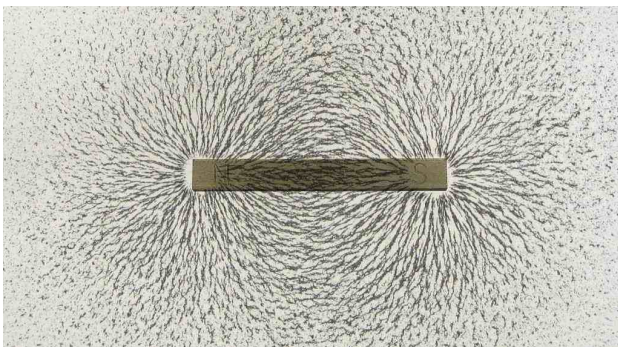


Table des matières

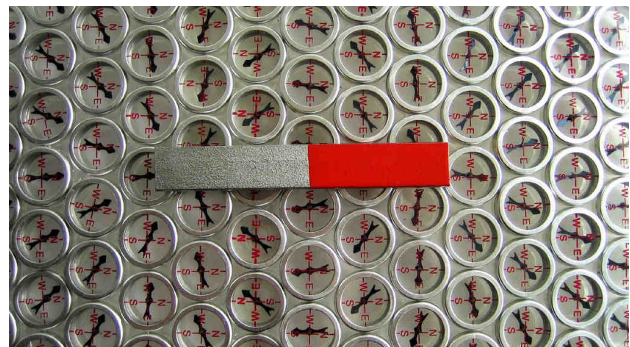
1 Les équations locales du champs magnétique	1
1.1 Rappels sur le champ magnétique	1
1.2 Équation de Maxwell-flux	2
1.3 Équation de Maxwell-Faraday.	4
2 Le théorème d'Ampère	5
2.1 Formule de Stokes	5
2.2 Énoncé du théorème	6
2.3 Application du théorème.	7
3 Exemples d'application	8
3.1 Le fil infini.	8
3.2 Le solénoïde infini.	9
4 Les dipôles magnétostatiques	12
4.1 Le moment magnétique	12
4.2 Champ magnétique créé par un dipôle magnétique.	14
4.3 Actions mécaniques et énergie potentielle d'un dipôle magnétostatique dans un champ extérieur	15
5 Complément : la loi de Biot et Savart	15

1 Les équations locales du champs magnétique

1.1 Rappels sur le champ magnétique



(a) Alignement de la limaille de fer autour d'un aimant.



(b) Organisation de boussoles autour d'un aimant.

Fig. 1 – Photographie de l'alignement de limaille de fer et de boussoles autour d'un aimant.

► Ordres de grandeurs de champs magnétiques

Champ...	Ordre de grandeur
▷ magnétique terrestre	$\approx 5 \times 10^{-5} \text{ T}$
▷ créé une bobine de 1000 spires parcourue par un courant de 1 A	$\approx 10 \text{ mT}$
▷ créé par un aimant	$\approx 0.1 \text{ à } 1 \text{ T}$
▷ dans un moteur électrique	$\approx 0.5 \text{ T}$
▷ créé par un électroaimant	$\approx 1 \text{ à } 10 \text{ T}$
▷ créé par un appareil IRM	$\approx 5 \text{ T}$

► Les propriétés des lignes de champ magnétiques

Propriété.

- ▷ Les lignes de champs sont dirigé du pôle Nord vers le pôle Sud des aimants.
- ▷ Si deux lignes de champ se coupent en un point, alors le champ est nul en ce point.
- ▷ Si les lignes de champ sont parallèles entre elles et régulièrement espacées alors le champ est uniforme.
- ▷ Les lignes de champ sont toujours des courbes fermées (dans un aimant, les lignes de champ se bouclent à l'intérieur de l'aimant).
- ▷ Les boucles de champ enroulent les courants électriques en respectant la règle de la main droite.
- ▷ Lorsque les lignes de champ se resserrent, la norme de B augmente. Les zones où le champ est le plus intense se trouvent au voisinage de la source du champ magnétique.

► Les cartes de champs magnétique

Une carte de champ magnétique est une représentation schématique de la disposition de la photographie de la figure 1. Les différentes topographie du champ sont manipulables sur cette page internet ([animation](#) [1]).

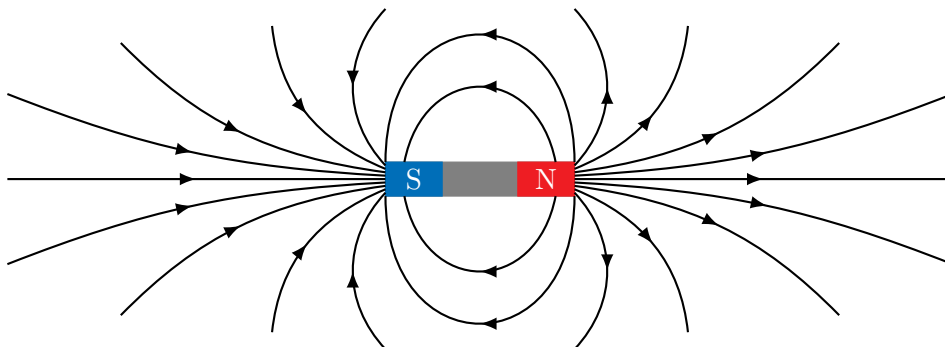


Fig. 2 – Carte de champ magnétique d'un aimant droit. Le champ est orienté du nord vers le sud.

1.2 Équation de Maxwell-flux

Théorème. Soit le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ au point M et à l'instant t . L'équation de Maxwell-flux est un des postulats de l'électromagnétisme, et indique

$$\text{div } \vec{B}(M, t) = 0 .$$

Remarque : Cette équation est, après celle de Maxwell-Gauss, la seconde des quatre équations de Maxwell qui constituent le postulat de l'électromagnétisme.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on en déduit que le flux de $\vec{B}(M, t)$ sur n'importe quelle surface fermée est nul.

Propriété. Le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ est à **flux conservatif**.

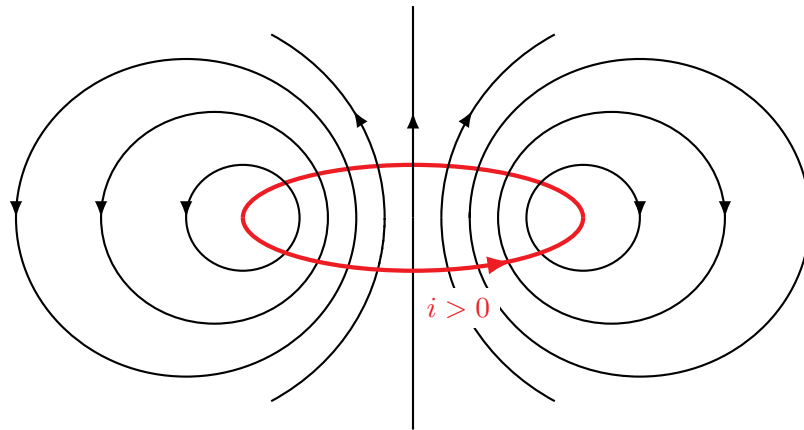


Fig. 3 – Carte de champ magnétique créé par une boucle de courant. Le champ est orienté selon la règle de la main droite (les doigts suivent le sens du courant et le pouce indique la direction du champ magnétique).

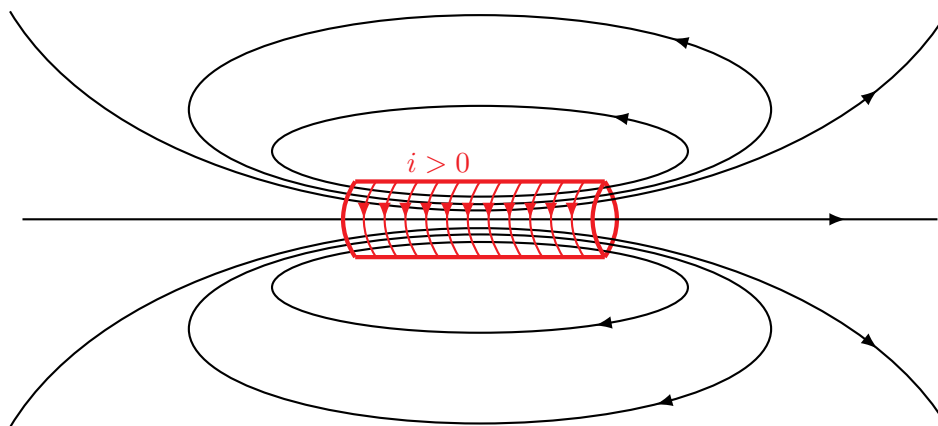
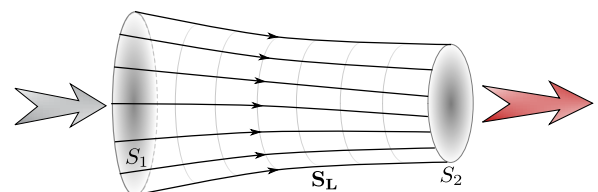


Fig. 4 – Carte de champ magnétique créé par un solénoïde (c'est-à-dire un ensemble de spires les unes contre les autres, autrement dit une bobine ou inductance). Le champ est orienté selon la règle de la main droite.

Prenons une surface construite sur un tube de champ. Par définition de celui-ci, le champ est parallèle à la surface latérale et donc le flux latéral est nul.

Ainsi, le flux entrant dans le tube est égal au flux sortant.

Si les lignes de champs se resserrent, la surface d'entrée devient plus grande que la surface de sortie. Nécessairement, le champ en sortie doit augmenter pour compenser la diminution de la surface. On retrouve donc que la valeur du champ augmente lorsque les lignes de champs se resserrent.



Remarque : Cette propriété avait déjà été remarquée pour le champ électrique dans les régions vide de charge.

1.3 Équation de Maxwell-Faraday

► Le rotationnel d'un champ vectoriel

Définition. On définit l'opérateur vectoriel **rotationnel** qui, appliqué à un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ vaut, en coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

La définition à retenir utilise l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes, on a en effet $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Pour l'interpréter, considérons un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ et étudions sa circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ sur un contour infinitésimal décrit figure 5.

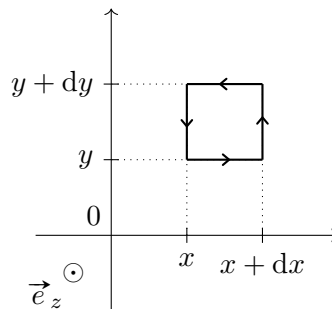


Fig. 5 – Contour infinitésimal orienté utilisé pour calculer $d\mathcal{C}$.

Au premier ordre, on peut supposer que le champ vectoriel $\vec{A}(x, y)$ est constant sur chaque côté. Pour simplifier l'écriture, on n'écrira pas la coordonnée z . On a alors

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= \vec{A}(x, y) \cdot (dx \vec{e}_x) + \vec{A}(x+dx, y) \cdot (dy \vec{e}_y) + \vec{A}(x, y+dy) \cdot (-dx \vec{e}_x) + \vec{A}(x, y) \cdot (-dy \vec{e}_y); \\ &= A_x(x, y)dx + A_y(x+dx, y)dy - A_x(x, y+dy)dx - A_y(x, y)dy; \\ &= (A_x(x, y) - A_x(x, y+dy))dx + (A_y(x+dx, y) - A_y(x, y))dy; \\ &= -\frac{\partial A_x}{\partial y}(x, y)dydx + \frac{\partial A_y}{\partial x}(x, y)dxdy = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A_x}{\partial y}(x, y) \right) dS. \end{aligned}$$

On constate que cette circulation élémentaire est égale au flux du vecteur rotationnel sur la surface interne délimitée par le contour.

Propriété. La circulation d'un champ vectoriel sur un contour infinitésimal est égal au flux du vecteur rotationnel de ce champ sur la surface délimité par le contour infinitésimal.

Attention, le flux est mesuré sur une surface fermée. L'orientation du flux est définie par le sens de parcours du calcul de la circulation grâce à la règle de la main droite.

Comme son nom l'indique, si le rotationnel est non nul, la circulation sur des petites boucles élémentaires est non nulle. Cela implique que le champ vectoriel tourne au niveau infinitésimal.

► **Énoncé**

Théorème. Soit le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ et le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ au point M et à l'instant t . L'équation de Maxwell-Ampère est un des postulats de l'électromagnétisme et indique

$$\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)$$

avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide, $\vec{j}(M, t)$ le vecteur densité de courant et c la célérité de la lumière dans le vide.

Remarque : Cette équation est, après celle de Maxwell-Gauss et de Maxwell-flux, la troisième des quatre équations de Maxwell qui constituent le postulat de l'électromagnétisme.

Propriété. Dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires magnétiques (ARQS magnétique), on a $\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \right|$ qui est négligeable devant les autres termes de l'équation de Maxwell-Faraday. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Faraday devient

$$\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t).$$

Cette équation permet en particulier d'étudier les champs magnétiques statiques.

Remarque : L'ARQS magnétique sera détaillée dans le chapitre EM5.

Ainsi, en interprétant le rotationnel comme l'existence de « boucles » de champs, cette équation justifie que les lignes de champ magnétostatiques sont fermées et entourent les sources de champ magnétique.

Le champ $\vec{B}(M, t)$ décrit dans cette équation est un objet mathématique non trivial. En effet, on peut l'écrire en coordonnées cartésiennes

$$\vec{B}(M, t) = E_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + E_y(x, y, z, t) \vec{e}_y + E_z(x, y, z, t) \vec{e}_z.$$

Pour déterminer ce champ, il faut donc déterminer entièrement trois fonctions de trois variables. L'application du rotationnel conduit à

$$\text{rot } \vec{B}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y}(x, y, z, t) - \frac{\partial B_y}{\partial z}(x, y, z, t) \\ \frac{\partial B_x}{\partial z}(x, y, z, t) - \frac{\partial B_z}{\partial x}(x, y, z, t) \\ \frac{\partial B_y}{\partial x}(x, y, z, t) - \frac{\partial B_x}{\partial y}(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} j_x(x, y, z, t) \\ j_y(x, y, z, t) \\ j_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}.$$

À cette équation, il faut rajouter l'équation de Maxwell-flux qui indique que la divergence du champ \vec{B} est nulle. À l'aide de ces deux équations, on peut théoriquement déterminer tout champ magnétostatique, mais cette opération est très fastidieuse.

2 Le théorème d'Ampère

2.1 Formule de Stokes

Considérons un champ vectoriel $\vec{A}(M)$. Nous avons vu que la circulation de ce champ sur une boucle élémentaire est égale au flux du rotationnel sur la surface définie par cette boucle.

Considérons maintenant deux points M_1 et M_2 infiniment proches. Considérons deux boucles élémentaires entourant ces deux points, orientées dans le même sens, et partageant une portion commune. La somme des deux circulations est égale à la circulation sur le contour extérieur total. En effet, la partie commune est parcourue dans un sens autour de M_1 et dans l'autre sens autour de M_2 , ces deux contributions

se compensent. La circulation totale est égale, par définition, à la somme des flux du rotationnel soit au flux total défini par le contour global.

Cette idée est à la base du théorème suivant dont la démonstration rigoureuse est laissée aux mathématiciens.

Théorème. Soit un champ vectoriel $\vec{B}(M)$ et Γ un contour fermé orienté et \mathcal{S} la surface ouverte entourée par le contour. Le vecteur surface élémentaire \vec{dS} est orienté par la règle de la main droite appliquée au contour Γ . La formule de **Sokes** indique

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot \vec{d\ell} = \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot } \vec{A}(M)) \cdot \vec{dS} .$$

La circulation d'un champ vectoriel sur un contour fermé est égale au flux du rotationnel de ce champ à travers la surface définie par ce contour.

Remarque : En toute rigueur, le théorème de Stokes est un théorème plus général. Il ne s'agit ici que de l'application de celui-ci en dimension 3. La formule de Green-Ostrogradski vu au chapitre précédent n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de ce théorème général.

► Retour sur le champ électrostatique

Nous avons vu au chapitre EM1 que le champ électrostatique est à circulation conservative, soit $\oint_{\Gamma} \vec{E}(M) \cdot \vec{d\ell} = 0$ sur toute courbe Γ . Ce résultat provient du fait que, en régime statique, on a $\text{rot } \vec{E}(M) = \vec{0}$. Il s'agit de la version statique de l'équation de Maxwell-Faraday. Cette équation n'est pas vraie en régime variable, nous verrons plus tard sa version généralisée.

Propriété. On admet la propriété mathématique suivante, avec $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel et $f(M)$ un champ scalaire,

$$\text{rot } \vec{A}(M) = \vec{0} \quad \iff \quad \exists f(M) \quad \text{tel que} \quad \vec{A} = \text{grad } f(M) .$$

Cette propriété se comprend en utilisant la propriété du gradient $\int_A^B \text{grad } f \cdot \vec{d\ell} = f(B) - f(A)$. Ainsi, si $A = B$, la circulation sur une courbe fermée est nulle, soit un rotationnel nul. Dit autrement, tout champ vectoriel dérivant d'un potentiel « ne boucle pas » au niveau microscopique, ce qui est cohérent avec la propriété des lignes de champ électrostatique qui sont issues des charges positives pour arriver sur les charges négatives..

Ainsi, l'existence du potentiel électrostatique $V(M)$ est intrinsèquement liée au fait que $\text{rot } \vec{E}(M) = \vec{0}$. Comme cette équation n'est plus vraie en régime variable, le potentiel V n'est plus défini de la même façon en régime variable et ne peut plus être utilisé.

2.2 Énoncé du théorème

Appliquons la formule de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday dans le cadre de l'ARQS magnétique, il vient

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{d\ell} = \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot } \vec{B}(M, t)) \cdot \vec{dS} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS} .$$

Théorème. Soit Γ une courbe fermée **orientée**, appelée **contour d'Ampère**. Le **théorème d'Ampère** indique, dans le cadre de l'ARQS magnétique, que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}(t)$$

avec $I_{\text{enlacé}}$ le courant enlacé par le contour Γ compté algébriquement selon la règle de la main droite.

*** **Attention !** Le contour Γ doit absolument être orienté. L'absence d'une telle orientation rend impossible le décompte algébrique du courant (positif s'il entre dans le contour et négatif dans le cas contraire).

Ce théorème est une reformulation intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday dans le cadre de l'ARQS magnétique. Il n'apporte fondamentalement aucune information supplémentaire que cette équation. En particulier, le calcul du champ \vec{B} avec l'opérateur rotationnel est possible directement. Toutefois, l'opérateur rotationnel conduit à des équations parfois complexes à manipuler, on l'évitera dans la mesure du possible.

De plus, l'équation de Maxwell-Faraday est une loi locale. Elle est compliquée à manipuler lors de la présence de singularités ponctuelles. Ainsi, la description du champ créé par un fil n'est pas possible à notre niveau de mathématique. Le théorème d'Ampère supprime ce problème car le courant enlacé est toujours correctement défini quel que soit le modèle de distribution de courants.

2.3 Application du théorème

Tout comme le théorème de Gauss, ce théorème ne s'applique aisément que lorsque le calcul se simplifie dans le cas de champs à hauts degrés de symétries.

► Application du principe de Curie au champ magnétique

Le principe de Curie indique que les symétries et dissymétries des « causes » se retrouvent dans les « conséquences ». Attention toutefois, cela ne s'applique qu'aux « conséquences » ayant un effet physique mesurable direct. Ce n'est pas le cas du champ magnétique. Les effets physiques des champs magnétiques sont toujours modélisés par une formule impliquant un produit vectoriel du champ magnétique.

C'est le cas par exemple du calcul du rotationnel, de la partie magnétique de la force de Lorentz $\vec{F} \wedge \vec{B}$ ou, comme nous le verrons plus tard, le vecteur de Poynting portant l'énergie du champ magnétique (qui proportionnel à $\vec{E} \wedge \vec{B}$, comme nous le verrons plus tard). Par exemple, pour mesurer un champ magnétique, on utilise une sonde à effet Hall, basée sur la force de Lorentz, ou un flux-mètre, basé sur l'équation de Maxwell-Faraday (et donc sur un calcul de rotationnel) comme nous le verrons plus tard.

Le principe de Curie doit être appliqué sur ces effets mesurables, et non pas directement sur le champ magnétique.

Propriété. Le principe de Curie s'applique aux conséquences mesurables du champ magnétique. Ainsi, on a :

- ▷ si la distribution de courant ne dépend pas d'une coordonnée de l'espace, le champ \vec{B} ne dépend pas de cette coordonnée ;
- ▷ le champ $\vec{B}(M, t)$ est orthogonal à tous les plans de symétrie de la distribution de courant passant par M ou, de façon équivalente, appartient aux plans d'antisymétrie de la distribution de charge passant par M .

Remarque : Pour aller plus loin, on dit que \vec{B} est un **pseudo-vecteur** physique. Il dépend des choix mathématiques qui sont faits pour l'étudier. En effet, tous les calculs sont réalisés avec une convention directe de l'espace (la « règle de la main droite »). Si on avait décidé d'utiliser la convention indirecte de l'espace, le vecteur \vec{B} aurait été inversé, alors que ses effets physiques seraient restés évidemment inchangés. La propriété précédente de symétrie s'applique pour tous les pseudos-vecteurs.

Méthode : Tout problème de calcul de champ doit commencer par une étude des symétries et des invariances des sources de champ dans le but de faire baisser le nombre d'inconnues du problème.

► Choix des contours d'Ampère

Le théorème d'Ampère est vrai **quel que soit** le contour orienté Γ . Ainsi, le choix du contour Γ est crucial pour appliquer ce théorème. En effet, lorsque le champ présente un degré suffisamment important de symétries, le calcul de la circulation peut se simplifier à une longueur multipliée par le module du champ. Dans ce cas, le théorème d'Ampère permet de déterminer directement le module du champ, et donc de déduire le champ magnétique.

Méthode : Pour choisir le contour d'Ampère, il faut une courbe pour laquelle la circulation est simple à calculer. Pour cela, deux critères essentiels sont à rechercher :

- ▷ on cherche une courbe telle que le champ soit constant dessus ;
- ▷ on cherche une courbe dont le vecteur élémentaire est parallèle ou orthogonal au champ.

Le choix du contour d'Ampère à considérer est donc directement lié à l'étude des invariances et des symétries du champ magnétique.

► Théorème de superposition

L'opérateur rotation est un opérateur linéaire, l'équation de Maxwell-Faraday est donc linéaire. Ainsi, si un champ \vec{B}_1 est créé par une distribution \vec{j}_1 et si un champ \vec{B}_2 est créé par une distribution \vec{j}_2 , la distribution $\vec{j}_1 + \vec{j}_2$ induira le champ $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Propriété. Soit une distribution de courant \vec{j} pouvant être décomposée comme la somme de distributions indépendantes \vec{j}_i . Le principe de superposition, conséquence de la linéarité de l'équation de Maxwell-Faraday, implique que le champ magnétique rayonné par \vec{j} est la somme des champs magnétiques rayonnés par les \vec{j}_i prises séparément.

Ce principe est très utile pour décrire des distributions n'ayant pas de symétrie ou d'invariance. En effet, s'il est possible de décomposer cette distribution en une somme de distributions ayant des symétries et des invariances, il suffit d'étudier les champs créés par celles-ci de façon indépendantes puis de sommer leur contribution au champ total.

3 Exemples d'application

3.1 Le fil infini

Considérons un fil linéaire infini. Il est parcouru par un courant I constant et uniforme. On se place en coordonnées cylindriques, le fil passant par l'origine O et parallèle à l'axe \vec{e}_z .

A priori, on a au point M le champ statique

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

► Étude des invariances et des symétries

Invariances : La distribution de courant est invariante par toute translation selon \vec{e}_z et par toute rotation autour de ce même axe. Ainsi, le champ est indépendante de r et de θ et on a donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Symétries : Le plan contenant le fil et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant, le champ \vec{B} est orthogonal à celui-ci.

Il vient donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta$.

Remarque : Le plan passant par M orthogonal au fil est plan d'antisymétrie de la distribution de courant. En effet, le courant va vers ce plan en dessous de celui-ci et s'en écarte au dessus de celui-ci. On en déduit que $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan. Ce résultat en soi n'est pas suffisant pour déterminer complètement le champ car il laisse la possibilité d'une composante du champ selon \vec{e}_r .

► Application du théorème d'Ampère

Choix du contour d'Ampère : Pour respecter les symétries décrites précédemment, on choisit un contour d'Ampère circulaire, orthogonal au fil et de centre confondu avec le fil et passant par le point M . Ce contour est orienté de sorte que le courant soit compté positivement avec la règle de la main droite. Ce contour est tracé figure 6.

Application du théorème : On calcule la circulation de $\vec{B}(M)$ sur le contour d'Ampère. On a

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{\Gamma} B(r) r d\theta.$$

Or, sur le cercle, $B(r)r$ est constant, on peut le sortir de l'intégrale, il vient donc

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = rB(r) \oint_{\Gamma} d\theta = 2\pi rB(r)$$

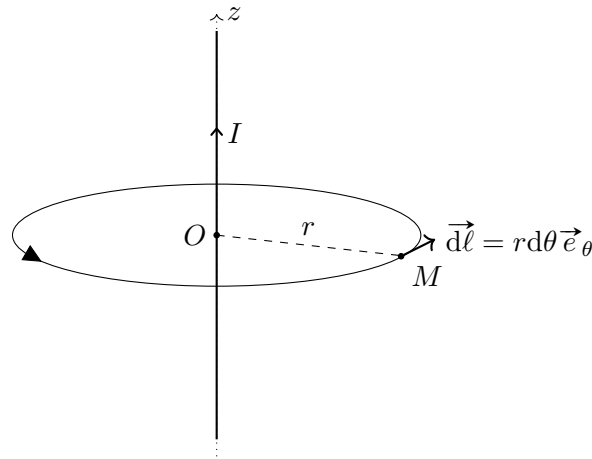


Fig. 6 – Contour d'Ampère du fil infini.

car l'intégrale de $d\theta$ sur le cercle complet vaut évidemment 2π .

Le courant enlacé est directement I compté positivement grâce à la règle de la main droite.

On en déduit en appliquant le théorème que $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

On constate que le champ diverge en $r = 0$. Cela provient du fait que l'équation de Maxwell-Faraday est locale et tient compte de la distribution volumique de courant. En introduisant le courant dans un fil de rayon nul, on introduit une singularité et donc une divergence. Celle-ci est levée si on tient compte de l'épaisseur du fil.

Remarque : Si le contour d'Ampère est orienté dans l'autre sens, on a $\vec{dl} = -r d\theta \vec{e}_\theta$. Ainsi, la circulation devient $-2\pi r B(r)$. Mais en changeant l'orientation du contour, le courant enlacé devient $-I$. On retrouve donc évidemment le même résultat. Dans un cas comme dans l'autre, l'important est de choisir une orientation et de s'y tenir dans les calculs.

3.2 Le solénoïde infini

Considérons un solénoïde (ou « bobine de fil ») infini représenté figure 7. Il est parcouru par un courant I constant et uniforme. On se place en coordonnées cylindriques, l'axe de révolution du solénoïde passant par l'origine O et parallèle à l'axe \vec{e}_z .

A priori, on a au point M le champ statique

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z .$$

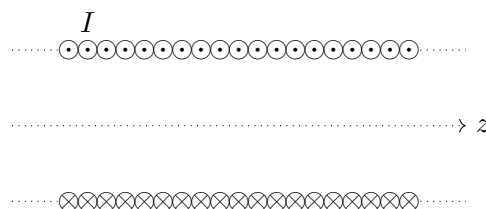


Fig. 7 – Solénoïde infini : le courant est sortant du dessin en haut et est entrant dans le dessin en bas.

► Étude des invariances et des symétries

Invariances : La distribution de courant est invariante par toute translation selon \vec{e}_z et par toute rotation autour de ce même axe. Ainsi, le champ est indépendante de r et de θ et on a donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Symétries : Le plan orthogonal au solénoïde et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant, le champ \vec{B} est orthogonal à celui-ci.

Il vient donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r) = B(r)\vec{e}_z$.

Remarque : Le plan passant par M et contenant l'axe z est plan d'antisymétrie de la distribution de courant. On en déduit que $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan. Ce résultat en soi n'est pas suffisant pour déterminer complètement le champ car il laisse la possibilité d'une composante du champ selon \vec{e}_r .

Choix des contours d'Ampère : Pour respecter les symétries décrites précédemment, on choisit des contours d'Ampère rectangulaire, avec deux côtés parallèles à \vec{e}_z et deux côté orthogonaux à \vec{e}_z .

► **Uniformité du champ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde**

On cherche à montrer que le champ intérieur et extérieur au solénoïde est constant.

Utilisation du théorème d'Ampère : Appliquons le théorème d'Ampère sur le contour représenté figure 8.

Pour cela, commençons par calculer la circulation du champ, on a

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} &= \int_A^B \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}; \\ &= \int_A^B B(r)\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z + \int_B^C B(r)\vec{e}_z \cdot dr\vec{e}_r + \int_C^D B(r)\vec{e}_z \cdot (-dz\vec{e}_z) + \int_D^A B(r)\vec{e}_z \cdot (-dr\vec{e}_r). \end{aligned}$$

Or $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = 0$ et le champ est constant le long des segments AB et CD, il vient donc

$$\oint_{ABCD} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = B(A) \int_A^B dz - B(C) \int_C^D dz = \ell(B(A) - B(C)).$$

Or aucun courant n'est enlacé par le contour ABCD, on a donc

$$\oint_{ABCD} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \ell(B(A) - B(C)) = 0.$$

D'où $B(A) = B(C)$.

On fait de même sur le même type de contour à l'extérieur du solénoïde.

On en déduit que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

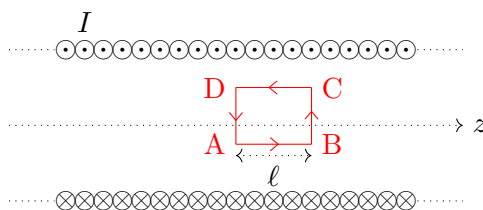


Fig. 8 – Contours d'Ampère à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

Utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday dans le cadre de l'ARQS magnétique : À l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde, il n'y a pas de distribution de courant. Ainsi, l'équation de Maxwell-Faraday dans le cadre de l'ARQS magnétique implique $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$.

En explicitant le rotationnel dans le cas où $\vec{B}(M) = \vec{B}(r) = B(r)\vec{e}_z$. En repassant en coordonnées cartésiennes, on peut écrire $\vec{B}(M) = B_z(x, y)\vec{e}_z$. On applique la définition du rotationnel, il vient

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Ainsi, $\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$, le champ est indépendant de x et y , donc de r .

Le champ est donc constant à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

Remarque : En utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a directement $\frac{dB}{dr} = 0$.

► Application du théorème d'Ampère

Notons \vec{B}_{ext} et \vec{B}_{int} les champs uniformes à l'extérieur et à l'intérieur du solénoïde. Pour lier les deux, on choisit cette fois un contour d'Ampère à cheval sur l'intérieur et l'extérieur du solénoïde, comme représenté figure 9.

Pour cela, commençons par calculer la circulation du champ, on a

$$\begin{aligned} \oint_{\text{ABCD}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} &= \int_A^B \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} ; \\ &= \int_A^B B(r) \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z + \int_B^C B(r) \vec{e}_z \cdot dr \vec{e}_r + \int_C^D B(r) \vec{e}_z \cdot (-dz \vec{e}_z) + \int_D^A B(r) \vec{e}_z \cdot (-dr \vec{e}_r) . \end{aligned}$$

Or $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = 0$ et le champ est constant et vaut B_{int} le long du segment AB et vaut B_{ext} le long du segment CD, il vient donc

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}} \int_A^B dz - B_{\text{ext}} \int_C^D dz = \ell(B_{\text{int}} - B_{\text{ext}}) .$$

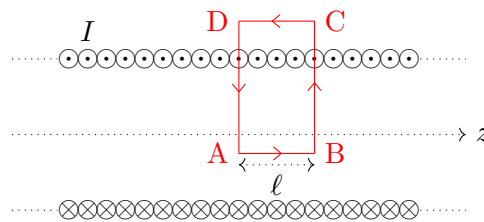


Fig. 9 – Contours d'Ampère à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

Le courant enlacé par ABCD est compté positivement par la règle de la main droite. Il vaut NI avec N le nombre de spires de courants sur la longueur ℓ .

En appliquant le théorème d'Ampère, on a donc

$$\ell(B_{\text{int}} - B_{\text{ext}}) = \mu_0 NI .$$

Propriété. En admettant que $B_{\text{ext}} = 0$, le champ constant à l'intérieur d'un solénoïde vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ avec $n = N/\ell$ le nombre de spires par unité de longueur et I le courant parcourant le solénoïde.

Remarque : La démonstration de $B_{\text{ext}} = 0$ est hors programme.

► Définition de l'inductance

Définition. On considère un circuit parcouru par un courant I . Ce courant crée un champ magnétique \vec{B}_p nommé **champ propre**. Le flux de \vec{B}_p à travers une surface S s'appuyant sur le circuit et orienté par le circuit est nommé **flux propre** et se note Φ_p .

$$\Phi_p = LI \quad (3.1)$$

où L est une constante positive qui ne dépend que des propriétés géométriques du circuit. L est nommée **inductance propre** et s'exprime en Henry (H).

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** Il s'agit bien du flux du champ créé par le circuit lui-même. Il ne faut pas tenir compte d'éventuels champs extérieurs.

Considérons une bobine, autrement dit un solénoïde « long » d'axe (Oz) , de longueur ℓ et composée de N spires de rayon R . On a montré que le champ magnétique à l'intérieur de la bobine vaut $\vec{B}(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{e}_z$.

On note surface S la surface d'une spire et Φ_0 le flux propre du champ \vec{B} à travers celle-ci. Le champ est uniforme et parallèle au vecteur surface \vec{S} d'une spire, donc $\Phi_0 = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$. Comme il y a N spires, le flux propre total vaut

$$\Phi_p = N\Phi_0 = NSB = NS\mu_0 \frac{N}{\ell} I = LI$$

en utilisant la définition de l'inductance.

Propriété. L'inductance d'une bobine de longueur ℓ , composée de N spires de surface S , vaut

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}.$$

4 Les dipôles magnétostatiques

4.1 Le moment magnétique

► Moment magnétique d'une boucle de courant

Définition. On considère une spire de rayon R parcourue par un courant i . Cette boucle forme une surface S . La normale à la surface est notée \vec{n} . Il s'agit d'un vecteur unitaire, normal à la surface formée par la boucle de courant et orienté dans le sens de la main droite (défini à partir du sens du courant). On définit le vecteur surface $\vec{S} = S\vec{n}$.

Le **moment magnétique** $\vec{\mathcal{M}}$ de N spires planes (en $A \cdot m^2$) est :

$$\vec{\mathcal{M}} = iN\vec{S} = Ni\pi R^2 \vec{n}. \quad (4.1)$$

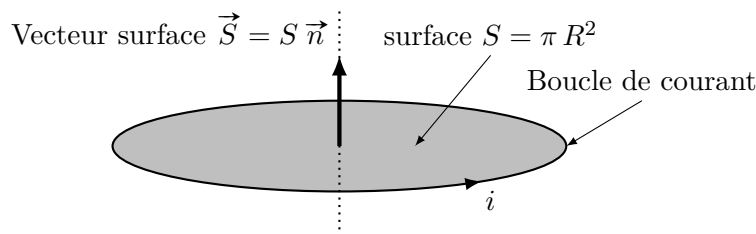


Fig. 10 – Le moment magnétique d'une boucle de courant.

► Moment magnétique d'un atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr

Le modèle de Bohr : Le **modèle de Bohr** de l'atome d'hydrogène suppose que l'électron de l'atome d'hydrogène décrit une trajectoire circulaire classique sur laquelle il ne rayonne pas de champ électromagnétique.

Ce postulat mécanique traduit la quantification de la norme L_n du moment cinétique de l'électron par rapport au noyau : $L_n = n\hbar$ avec $n \in \mathbb{N}$ avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Étude classique de l'atome d'hydrogène : Dans le cas classique, un atome d'hydrogène peut être décrit par un noyau constitué d'un unique proton fixe et un électron mobile. Cette hypothèse est l'**approximation de Born-Oppenheimer**. Elle est d'origine quantique mais, d'un point de vue classique, se justifie en utilisant les lois de Newton. En effet, la force exercée du proton sur l'électron est l'opposée de la force de l'électron sur le proton par la troisième loi de Newton. Ainsi, par la seconde loi de Newton, on a $m_e a_e = m_p a_p$ avec a les accélérations des particules. Or $m_p \approx 2000m_e$, et donc l'accélération du proton est négligeable devant celle de l'électron. On peut le supposer fixe.

Dans le cas classique, l'électron subit l'attraction électrique du proton. Il s'agit d'un problème de force centrale newtonienne¹.

Plaçons nous dans un référentiel galiléen. Si \vec{F} est une force centrale, alors le théorème du moment cinétique implique

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \boxed{\vec{L} = \text{Cte}}$$

car $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ sont colinéaires.

Donc $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v}$ est conservé. On se place alors en coordonnées polaires et on trouve $\vec{L} = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$.

Si la trajectoire est circulaire, alors $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ avec T la période de révolution de l'électron. Il vient $\vec{L} = m_e \frac{2\pi R^2}{T} \vec{e}_z = 2m_e \frac{S}{T} \vec{e}_z$.

De plus, tout de passe comme si on avait une boucle courant $I = \frac{\delta q}{dt} = \frac{-e}{T}$ autour du proton.

Ainsi, on a le vecteur surface $\vec{S} = \frac{T}{2m_e} \vec{L}$. Et donc, il vient le moment magnétique de l'atome d'hydrogène,

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_H = i\vec{S} = -\frac{e}{T} \frac{T}{2m_e} \vec{L}.$$

Propriété. Le moment magnétique atomique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ est relié au moment \vec{L} par la relation $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_H = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$ avec $\gamma = -\frac{e}{2m_e}$ le **rapport gyromagnétique** de l'électron. Le résultat de cette étude et démonstration classique s'avère être toujours correct en mécanique quantique.

Le magnéton de Bohr : On a $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$ et, par hypothèse de Bohr, $L_n = n\hbar$.

Définition. On définit le **magnéton de Bohr** par $\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_e}$. Le moment magnétique lié aux électrons dans un atome est quantifié et vaut $\mathfrak{M} = n\mu_B$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Ce résultat est vrai pour tous les atomes et se démontre rigoureusement dans le cadre de la mécanique quantique.

Ce magnéton de Bohr peut être construit par argument dimensionnel. En effet, un moment magnétique est de dimension IL^2 . Or on a $[e] = IT$, $[\hbar] = L^2 MT^{-1}$ et $[m_e] = M$. La seule façon de construire un moment magnétique avec ces grandeurs est la combinaison $e\hbar/m_e$, le facteur $-1/2$ ne pouvant être déduit d'une analyse dimensionnelle.

On trouve en particulier $|\mu_B| = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

► Moment magnétique d'un matériau

Le courant i étant à l'origine du champ magnétique, on peut dire que le moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ est à l'origine du champ magnétique. Ainsi lorsque l'on a un courant électrique, le lien entre intensité, moment magnétique et champ magnétique est facile à établir.

Dans un aimant droit par exemple, il n'est pas facile de mettre en évidence des boucles de courant. En effet, l'origine du champ magnétique dans la matière est quantique mais en première approche, il peut être associé à des boucles de courant microscopiques résultant du déplacement des électrons autour des atomes. Chaque boucle de courant microscopique crée un moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_i$ et le moment magnétique total est $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \sum_i \overrightarrow{\mathfrak{M}}_i$.

Dans la majorité des matériaux les $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_i$ s'annulent deux à deux mais pour certains matériaux, ce n'est pas le cas et un moment magnétique non nul persiste donnant naissance à un champ magnétique.

1. Pour plus de détails, se reporter au chapitre de première année correspondant

Propriété. Tous les matériaux magnétiques sont définis grâce à leur moment magnétique macroscopique $\vec{\mathcal{M}}$. Dans le cas des aimants, il est constant.

Le moment magnétique d'un aimant permanent est maximal quand tous les moment dipolaires des électrons le constituant sont alignés dans le même sens. Comme leur densité est de l'ordre de $10 \times 10^{-30} \text{ m}^{-3}$ et que chacun a un moment dipolaire en ordre de grandeur $|\mu_B|$, on en déduit que l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent est 10^7 A/m , soit pour un aimant cubique de côté 1 cm, un moment magnétique de l'ordre de $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Moment magnétique...	Ordre de grandeur
▷ d'un aimant droit usuel	$\approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$
▷ d'un petit aimant néodyme fer bore	$\approx 10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$
▷ de la Terre	$\approx 8 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

► Utilité du moment magnétique

On retiendra que l'origine d'un champ magnétique est le déplacement de particules chargées c'est-à-dire des courants, microscopiques ou macroscopiques. Ces courants sont équivalents à un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ qui peut donc être considéré également comme l'origine du champ magnétique. La notion de moment magnétique permet d'unifier les deux sources de champ magnétique.

Le moment magnétique est orienté du pôle Sud vers le pôle Nord, et permet ainsi de polariser les boucles de courants.

À moment magnétique identique, le champ magnétique à grande distance est le même pour un aimant ou une boucle de courant.



Fig. 11 – Similitudes entre les champs créés par un aimant et une bobine. Les deux sources de champs sont toutes deux équivalentes à un même moment magnétique orienté du pôle Sud vers le pôle Nord.

4.2 Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

Définition. Un **dipôle magnétique** est un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ vu à très grande distance. Si on note a la taille caractéristique du dipôle, alors l'approximation dipolaire consiste à observer le champ à une distance r telle que $r \gg a$.

On peut montrer que, dans l'approximation dipolaire, si le dipôle est au point O , alors le champ magnétique rayonné en M vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}})\vec{u} - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}$$

où $r\vec{u} = \vec{OM}$.

Remarque : En remplaçant ϵ_0 par $1/\mu_0$ et \vec{p} par $\vec{\mathcal{M}}$, cette expression du champ magnétique est identique à celle du champ électrique rayonné par un dipôle électrostatique \vec{p} .

La démonstration de ce champ est hors programme.

Les lignes de champs du dipôle sont représentées figure 12.

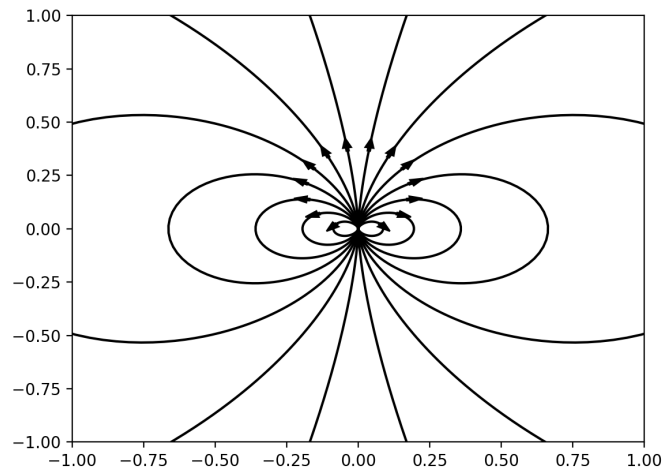


Fig. 12 – Carte de champ magnétique du dipôle électrostatique.

4.3 Actions mécaniques et énergie potentielle d'un dipôle magnétostatique dans un champ extérieur

Les actions mécaniques subies par un dipôle magnétostatique se retrouvent en calculant les actions de Laplace appliquées à une boucle de courant. On suppose que le champ \vec{B} est un champ magnétostatique d'origine extérieure.

On admet les relations suivantes.

Propriété. Le **couple** subi par le dipôle \vec{M} plongé dans le champ \vec{B} extérieur vaut $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_O$.
 L'**énergie potentielle** du dipôle rigide \vec{M} plongé dans le champ \vec{B} extérieur vaut $\mathcal{E}_m = -\vec{M} \cdot \vec{B}_O$.
 La **force** subie par le dipôle \vec{M} plongé dans le champ \vec{B} extérieur vaut $\vec{F} = \text{grad} (\vec{M} \cdot \vec{B}_O)$ que l'on peut réécrire $\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_O$.
 Dans les trois cas, on a noté \vec{B}_O le champ au centre du dipôle.

Remarque : La formule donnant le couple a été démontrée en première année dans le cas d'un circuit rectangulaire.

On constate que ces résultats sont identiques à ceux du dipôle électrostatique à condition d'échanger \vec{M} et \vec{p} ainsi que \vec{B} et \vec{E} . On en tire donc les mêmes conclusions

Propriété. Les positions d'équilibres du dipôles soumis à un champ magnétique extérieur sont :

- ▷ le moment est orienté parallèlement au champ, cette position est stable ;
- ▷ le moment est orienté anti-parallèlement au champ, cette position est instable.

La force subie par le dipôle magnétostatique soumis à un champ magnétique extérieur tend à :

- ▷ aligner le dipôle avec le champ ;
- ▷ diriger le dipôle vers les zones de champs forts.

5 Complément : la loi de Biot et Savart

Cette loi, hors programme, permet le calcul direct du champ magnétique connaissance la distribution de courant.

Soit une distribution de courant \vec{j} définie sur un volume \mathcal{V} , le champ créé au point M par la distribution vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$$

avec \vec{u} le vecteur unitaire dirigé de P vers M et r la distance PM .

Dans le cas d'un circuit filiforme fermé \mathcal{C} , on remplace $\vec{j} d\tau$ par $I d\vec{\ell}$ et il vient

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}.$$

Cette relation permet de calculer le champ créé par une spire de courant sur son axe.

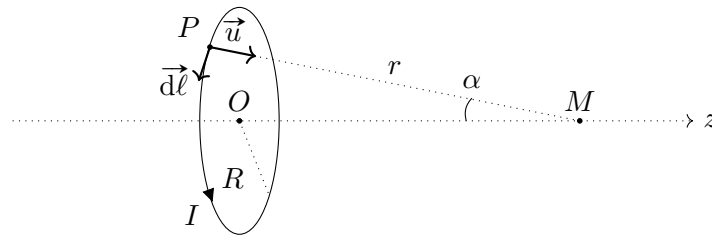


Fig. 13 – Schéma permettant le calcul du champ créé par une spire de courant.

Calculons le produit vectoriel

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = R d\theta \vec{e}_\theta \wedge \frac{1}{r} (-R \vec{e}_r + r \cos \alpha \vec{e}_z) = \frac{R^2}{r} d\theta \vec{e}_z + R \cos \alpha d\theta \vec{e}_r.$$

On applique donc la formule de Biot et Savart, soit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\oint_{\mathcal{C}} \frac{R^2 d\theta \vec{e}_z}{r^3} + \oint_{\mathcal{C}} \frac{R \cos \alpha d\theta \vec{e}_r}{r^2} \right).$$

La seconde intégrale est nulle car la somme de tous les vecteurs \vec{e}_r sur le tour du cercle s'annule. En effet, on a $\vec{e}_r(\theta) = -\vec{e}_r(\pi + \theta)$. On a donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{R^2 d\theta \vec{e}_z}{r^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi r^3} \left(\oint_{\mathcal{C}} d\theta \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^3} \vec{e}_z$$

où on a utilisé $\oint_{\mathcal{C}} d\theta = 2\pi$.

Or $R = r \sin \alpha$ et donc on trouve le champ créé par une spire de courant sur un point M de son axe $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$.

Références

- [1] http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/topoB.php