

Table des matières

1 Propagation dans l'approximation de l'optique géométrique	1
1.1 Rappels sur la lumière	1
1.2 La vibration lumineuse.	2
1.3 Le chemin optique	3
1.4 Le théorème de Malus	5
1.5 Les récepteurs de lumière et l'intensité lumineuse	7
2 Émetteurs de lumières et superposition d'ondes	8
2.1 Les sources de lumière	8
2.2 Superposition d'ondes lumineuses	9
2.3 Interférences à deux ondes.	10
2.4 Exemple du réseau de fentes rectilignes parallèle	12
3 Compléments	13
3.1 Interférences à N ondes	13
3.2 Principe de Fermat et théorème de Malus.	16

1 Propagation dans l'approximation de l'optique géométrique

1.1 Rappels sur la lumière

Les rayonnements électromagnétique connus couvrent une gamme de fréquence très étendue, sur plus de 20 ordres de grandeurs (figure 1). Les sources de chaque rayonnement sont très différentes. Ces rayonnements proviennent du mouvement de particules chargées.

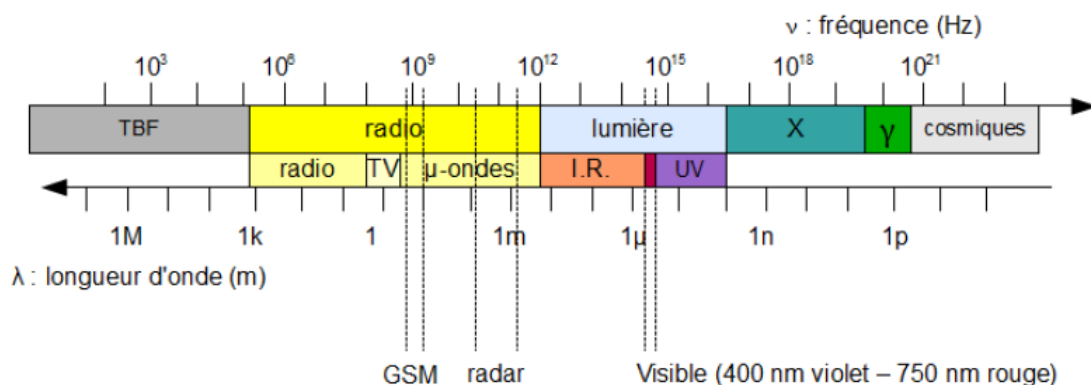


Fig. 1 – Le spectre électromagnétique.

Propriété. La lumière visible est une onde électromagnétique, qui correspond à ce que l'on appelle le « visible » de ce spectre. Cela correspond à des longueurs d'ondes dans le vide comprises entre 400 nm (violet) et 800 nm (rouge).

1.1.1 L'indice optique

Dans le vide, la célérité des ondes électromagnétiques est de $c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Remarque : Il est à noter que cette vitesse est la vitesse maximale atteinte par n'importe quel corps en mouvement. Rien ne peut aller plus vite que la lumière. En conséquence, si une application numérique donne une valeur supérieure à c , elle est nécessairement fautive.

Dans les milieux matériels, lorsque celui-ci est transparents pour la longueur d'onde étudiée, la vitesse des ondes électromagnétiques est modifiée.

Définition. Soit une onde électromagnétique se propageant à la célérité c_m dans un milieu. On définit l'**indice optique** n d'un milieu par la relation

$$c_m = \frac{c}{n}$$

avec c la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. L'indice optique est une grandeur sans dimension.

Comme rien ne peut aller plus vite que la lumière, $c_m < c$. En remplaçant c_m par sa définition, il vient $n > 1$.

Propriété. Les indices optiques sont toujours supérieurs à 1.

Milieu	Vide	Air	Eau	Verre
n	1	≈ 1	≈ 1.33	1.5 à 1.8

Tab. 1 – Quelques ordres de grandeurs d'indices optiques.

Remarque : Si le milieu est dispersif, c'est-à-dire que la célérité dépend de la longueur d'onde, l'indice optique n dépend de λ . Dans le verre par exemple, la loi de Cauchy qui indique que $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$ avec A et B deux constantes.

Conséquences sur les longueurs d'ondes : La fréquence d'une onde électromagnétique est fixe. En effet, la fréquence est directement liée à l'énergie de l'onde comme nous le verrons plus tard dans l'année, et celle-ci reste fixe lors d'un changement de milieu.

Considérons une onde de fréquence f , passant du vide dans un milieu d'indice n . On a $f = f_{\text{vide}} = f_{\text{milieu}}$ d'où $\frac{c}{\lambda} = \frac{c_m}{\lambda_m}$ avec λ la longueur d'onde dans le vide et λ_m la longueur d'onde dans le milieu.

Propriété. Soit une onde électromagnétique de longueur d'onde λ dans le vide, dans un milieu d'indice n , sa longueur d'onde dans le milieu λ_m vaut $\lambda_m = \frac{\lambda}{n}$.

Remarque : C'est la fréquence qui impose la couleur d'une onde (et non pas la longueur d'onde). Une onde lumineuse ne change pas de couleur en changeant de milieu !

1.2 La vibration lumineuse

La lumière est une onde électromagnétique. Ainsi, elle est définie par la propagation du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . L'énergie portée par le champ, et donc l'énergie lumineuse, est définie par la propagation du vecteur de Poynting. On montre¹ que la puissance surfacique moyenne transportée par le champ vaut $\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ avec E_0 la norme de l'amplitude du champ électrique \vec{E} . Tous les détecteurs lumineux sont sensibles non pas au champ électromagnétique mais à cette puissance portée par le champ.

1. Cf le chapitre d'électromagnétisme EM 5.

Définition. On définit l'**éclairage** (ou l'**intensité**) lumineuse I comme la puissance surfacique portée par le champ électromagnétique de la lumière. Elle est proportionnelle au carré de la norme de l'amplitude du champ électrique et s'exprime en watt par mètre carrés (W/m^2).

Ainsi, il n'est pas nécessaire en première approche de tenir compte du caractère vectoriel du champ électromagnétique pour étudier la lumière², mais il est nécessaire de conserver son aspect ondulatoire. Nous devons donc manipuler une onde scalaire représentant le champ électrique.

Définition. Pour décrire une onde lumineuse, on utilise un modèle ondulatoire scalaire. L'onde lumineuse émise par une source monochromatique idéale au point M et à l'instant t est alors représentée par une **vibration lumineuse** du type

$$s(M, t) = a(M) \cos(\omega t + \varphi(M))$$

où $\varphi(M)$ représente la phase à l'origine de l'onde lumineuse au point M , $\omega = 2\pi f$ sa pulsation (f étant la fréquence) et $a(M)$ l'amplitude de l'onde lumineuse. La vibration lumineuse est portée par le rayon lumineux.

Pour manipuler plus facilement cette grandeur, on utilise la notation complexe

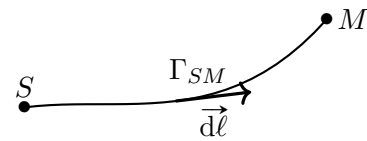
$$s(M, t) = \Re(\underline{s}(M, t)) \quad \text{avec} \quad \underline{s}(M, t) = a(M) \exp[i(\omega t + \varphi(M))] .$$

Cette grandeur représente le champ électrique. Pour revenir à la grandeur physique mesurable, il faut calculer le carré de la vibration $s(M, t)^2$.

1.3 Le chemin optique

Étudions plus en détail la phase de l'onde lumineuse.

Soit un rayon lumineux dans un milieu d'indice n (non nécessairement uniforme) issu d'un point source S et étudié au point M . On note Γ_{SM} la courbe décrivant ce rayon. Le vecteur infinitésimal $\vec{d\ell}$ décrit cette courbe.



Calculons la phase en $\varphi(M)$ liée à la propagation de l'onde³. En particulier, en notant τ le temps de propagation de l'onde depuis la source, la phase totale au point M à l'instant t correspond à la phase totale au point source au temps d'émission $t - \tau$. On a donc

$$\omega t + \varphi(M) = \omega(t - \tau) + \varphi^0(S)$$

avec $\varphi^0(S)$ la phase initiale au point source. Il vient donc

$$\varphi(M) = \varphi^0(S) - \omega\tau$$

avec par définition $\tau = \int_{\Gamma_{SM}} d\ell / c_m$ avec c_m la célérité dans le milieu. Il vient alors, en notant c la célérité de la lumière dans le vide,

$$\omega\tau = \frac{2\pi f}{c} \int_{\Gamma_{SM}} \frac{c}{c_m} d\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{\Gamma_{SM}} n d\ell$$

avec $\lambda = c/f$ la longueur d'onde dans le vide.

Définition. Soit un rayon lumineux issu du point S et arrivant au point M . On note Γ_{SM} la courbe décrivant ce rayon. On définit le **chemin optique** (SM) par la

$$(SM) = \int_{\Gamma_{SM}} n d\ell .$$

2. Le modèle scalaire de la lumière que nous utilisons précède d'ailleurs la théorie de Maxwell sur l'électromagnétisme.
3. Pour plus de détail, revoir le cours de première année sur la propagation des ondes.

Dans le cas d'une propagation dans un milieu homogène, l'indice optique est uniforme et, par les hypothèses du modèle géométrique de la lumière, la lumière se propage en ligne droite. On a donc

$$(SM) = \int_S^M n dl = n \int_S^M dl = nSM$$

avec SM la distance géométrique entre S et M .

Propriété. Soit un rayon lumineux issu du point S et arrivant au point M . La différence de phase entre S et M vaut

$$\varphi(M) = \varphi^0(S) - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)$$

avec λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide et (SM) le chemin optique de S vers M .

Remarque : La phase d'une source $\varphi^0(S)$ peut être prise nulle par convention, quitte à changer la définition de l'origine des temps t .

1.3.1 Interprétation du chemin optique

On a vu que

$$(SM) = \int_{\Gamma_{SM}} n dl = c \int_{\Gamma_{SM}} \frac{dl}{c_m} = c\tau.$$

Le chemin optique (SM) est donc égal à la distance $c\tau$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide et τ le temps de propagation de la lumière de S vers M .

Propriété. Le chemin optique (SM) est égal à la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant la durée de parcours de la lumière dans le milieu matériel de S vers M .

Cette remarque permet de comprendre pourquoi (SM) est comparé à la longueur d'onde dans le vide dans la phase. En effet, l'introduction de n dans la différence de marche permet de se ramener systématiquement à des grandeurs dans le vide.

Pour cette raison, dans le vide, on a simplement $(SM) = SM$ avec SM la distance géométrique de S vers M .

1.3.2 Ondes sphériques et ondes planes

L'onde sphérique : Considérons une source ponctuelle de lumière dans un milieu homogène. Elle va émettre de la lumière dans toutes les directions de l'espace.

Définition. L'onde lumineuse issue d'une source ponctuelle de lumière est une onde **sphérique**. Par conservation de l'énergie, dans un milieu homogène d'indice n , en notant O la position de la source la vibration lumineuse s'écrit

$$s_{\text{sphérique}}(M, t) = \frac{K}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}nr\right)$$

avec $r = OM$ et K une constante.

Dans un milieu homogène, les rayons lumineux sont des droites issues de la source.

L'énergie est répartie uniformément sur une sphère de surface $S = 4\pi r^2$. En notant \mathcal{E}_0 l'énergie lumineuse émise par la source, on doit donc avoir par définition de la vibration lumineuse et de l'intensité lumineuse $a(M)^2 S = \mathcal{E}_0$, il vient $a(M) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0}{4\pi}}$. D'où l'amplitude décroissant en $1/r$.

Remarque : Une onde sphérique n'est pas une onde plane progressive décrite en première année et dans le chapitre EM5. Ce n'est pas contradictoire avec le fait que la vibration lumineuse est décrite localement par une onde plane. En effet, en un point donné, la phase de l'onde est bien de la forme $\omega t - kr$.

L'onde plane : Si on se place à une très grande distance d'une onde sphérique, on observe alors une onde plane. En effet, à très grande distance, la courbure de l'onde sphérique devient négligeable⁴ et le facteur $1/r$ peut être considéré comme constant sur une large gamme de distance.

Par exemple, l'onde lumineuse que l'on reçoit d'un point source très éloigné, comme une étoile ou l'image d'un objet situé sur le point focal objet d'une lentille mince, peut être considéré comme une onde plane. De plus, ce modèle permet aussi de décrire la lumière émise par les LASER qui peut être considéré en première approximation comme une source purement monodirectionnelle.

Définition. Une onde plane lumineuse est décrite par la vibration lumineuse

$$s_{\text{sphérique}}(M, t) = a_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (SM) \right)$$

avec S le point source et a_0 l'amplitude constante de l'onde.

Dans un milieu homogène, les rayons sont parallèles entre eux et représentent un objet à l'infini.

Passage d'une onde sphérique à onde plane : Comme l'image d'un objet à l'infini par une lentille mince est ponctuel et est situé sur le point focal image de la lentille, on constate qu'une lentille mince permet de transformer une onde plane en onde sphérique. Et inversement avec un objet ponctuel placé sur le point focal objet d'une lentille permet de transformer une onde sphérique en onde plane.

Les surfaces d'ondes :

Définition. Une **surface d'onde** est une surface sur laquelle tous les rayons issus d'une même source ont parcouru le même chemin optique. Autrement dit, si on note S la source de l'onde et Π un plan d'onde, on a $\forall M \in \Pi, (SM) = \text{Cte}$.

Ainsi, par définition, tous les états vibratoires sur une surface d'onde sont en phase, on les appelle aussi **surfaces équiphase**.

Par exemple, dans un milieu homogène, la surface d'une sphère est une surface d'onde d'une onde sphérique (figure 2) et, toujours dans un milieu homogène, les plans orthogonaux aux rayons lumineux sont des surfaces d'onde d'une onde plane (figure 3) .

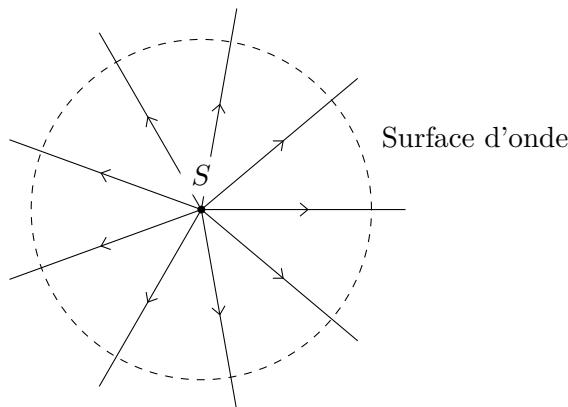


Fig. 2 – Rayons représentant une onde sphérique.

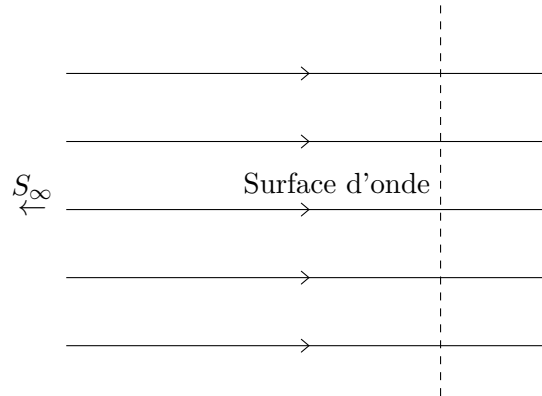


Fig. 3 – Rayons représentant un onde plane.

1.4 Le théorème de Malus

1.4.1 Rappel sur les hypothèses de l'optique géométrique

On se place dans le cadre des milieux homogènes, c'est-à-dire que l'indice optique n ne varie pas sur l'échelle du problème étudié.

- ▷ Les rayons sont **indépendants** : ils n'interagissent pas entre eux et leurs intensités s'ajoutent (pas d'interférences).
- ▷ Les rayons lumineux se propagent en **ligne droite**.

4. Le sol est plat mais la Terre est ronde.

▷ Ils vérifient le **principe du retour inverse** : si une source positionnée au point A éclaire un point B en suivant un chemin donné, alors une source de lumière positionnée en B éclaire le point A en suivant le chemin inverse (figure 4).

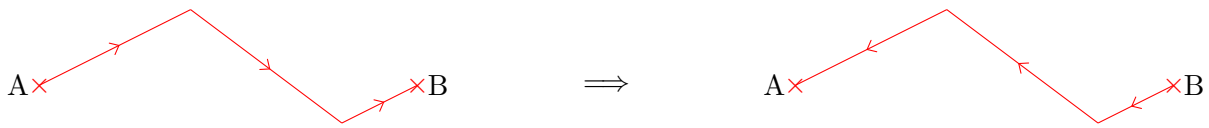


Fig. 4 – Principe du retour inverse de la lumière.

1.4.2 Le théorème de Malus

Théorème. Après avoir subi un même nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle sont normaux aux surfaces d'ondes.

Remarque : La démonstration de ce théorème est hors programme. Elle est donnée à titre culturel au paragraphe 3.2.

☛☛☛ **Attention ! Le théorème ne s'applique pas en cas de diffraction.**

D'un point de vue théorique, ce théorème permet de donner une définition précise des rayons lumineux : ces rayons sont normaux aux surfaces d'ondes.

On constate que ce théorème est vérifié sur les figures représentant les ondes sphériques (figure 2) et planes (figure 3).

L'image en optique géométrique se forme au croisement des rayons émergents du système optique. De plus, par l'application du principe de Fermat, on a vu que les chemins optiques de tous les rayons sont égaux. On en déduit la propriété suivante représentée figure 5.

Propriété. L'image géométrique se forme au centre de surfaces d'ondes sphériques.

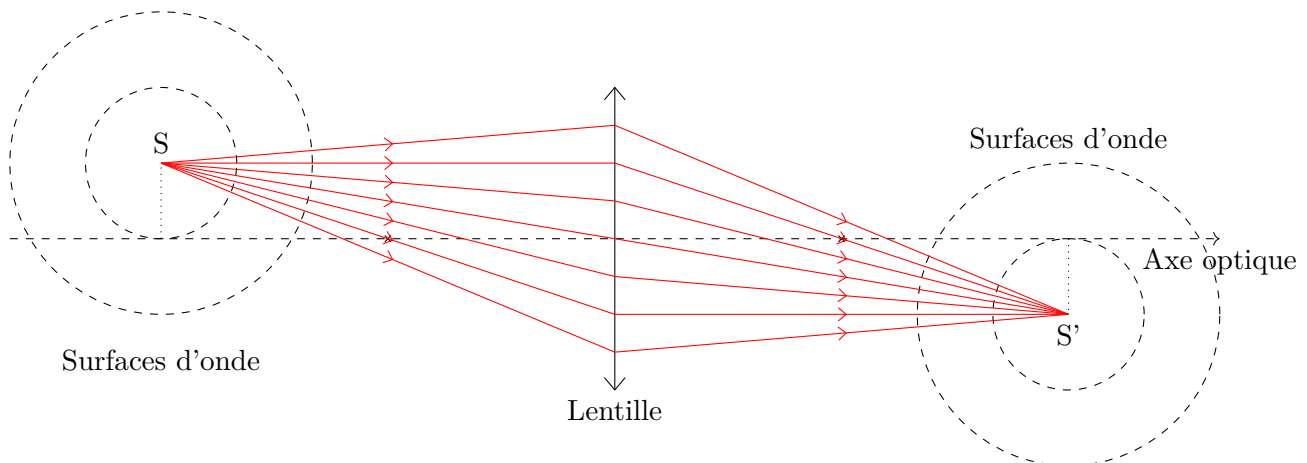


Fig. 5 – Ensemble des rayons issus du point objet S convergeant vers le point image S'. L'objet émet une onde sphérique tandis que les surfaces d'ondes sont sphériques autour de l'image.

1.4.3 Application aux lentilles minces

En première année, les règles de constructions des images à travers une lentille mince ont été étudiées. En particulier, si A est l'objet et A' l'image à travers une lentille L, on dit qu'ils sont conjugués. De plus, tous les rayons issus de A convergent vers A' après la traversée de la lentille dans les conditions de Gauss.

Propriété. Si A et A' sont conjugués par une lentille mince, alors tous les rayons issus de A convergent vers A' dans les conditions de Gauss. En application du théorème de Malus, on a **pour tous les rayons** $(AA') = Cte$.

Remarque : Cette égalité se comprend comme une approximation valable au moins à l'ordre 1 en l'écart entre les rayons.

Ce résultat se démontre à partir de la figure 5. En effet, les chemins optiques sont les mêmes entre les rayons à partir de la source vers un cercle en tant que plan d'onde. Ensuite, en appliquant le principe de retour inverse, tous les chemins optiques sont identiques du point image vers ce même cercle. D'où le résultat.

Ce résultat peut sembler surprenant car, de toute évidence, les rayons ne sont pas du tout de la même longueur géométrique. Toutefois, il ne faut pas oublier que la représentation de la lentille comme une ligne n'est qu'une modélisation. En réalité, la lentille a une épaisseur variable comme rappelé figure 6. De plus, dans la lentille, l'indice optique est plus grand que dans l'air. Ainsi, le chemin optique dans la lentille peut largement compenser la différence de chemin optique à l'extérieur. Il est à noter que cela ne peut pas avoir lieu si l'écart entre les chemins optiques dans l'air est vraiment trop important, ce qui implique que les conditions de Gauss sont bien nécessaires pour former une image nette.

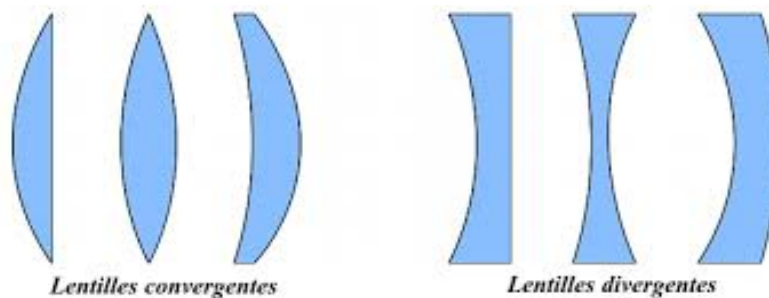


Fig. 6 – Les différents types de lentilles minces et la visualisation de leur épaisseur.

1.5 Les récepteurs de lumière et l'intensité lumineuse

Les fréquences optiques sont de l'ordre de 10^{15} Hz. Ainsi, en une seconde, le même motif vibratoire est répété 10^{15} fois. Aucun détecteur de lumière n'est capable d'observer une telle fréquence. Par exemple, le temps de réponse de l'œil est de l'ordre de 50 ms, ce qui permet de voir environ vingt images distinctes par secondes. Les caméras rapides CCD les plus perfectionnées utilisées en laboratoire de recherche sont capables de prendre environ 100 000 images par secondes. Une photodiode cablée dans un circuit électrique permettant de convertir une luminosité en courant électrique a un temps de réponse limité par le circuit électrique, au mieux de l'ordre de 1 ns.

On rappelle que la grandeur observable en optique est l'éclairement, soit la quantité de watt par unité de surface arrivant sur une zone donnée. Il s'agit donc de la quantité d'énergie portée par les photons par seconde. Ainsi, quel que soit le capteur lumineux utilisé, son temps de réponse est très largement supérieur au temps typique de variation de la vibration lumineuse.

Propriété. L'intensité lumineuse mesurée est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de la vibration lumineuse $I(M) = \langle s(t, M)^2 \rangle$.

En toute rigueur, cette valeur moyenne est prise sur une durée correspondant au temps de réponse du détecteur.

Remarque : Cette propriété marque une différence fondamentale entre les ondes mécaniques et les ondes lumineuses. En effet, concernant les ondes mécaniques, l'amplitude de l'onde est directement mesurable alors que ce n'est pas le cas des ondes lumineuses.

Dans le cas d'une vibration lumineuse émise par une onde monochromatique $s(t, M) = a(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$, on a

$$I(M) = \langle s(t, M)^2 \rangle = a(M)^2 \langle \cos(\omega t - \varphi(M))^2 \rangle = \frac{1}{2} a(M)^2 .$$

En effet, on peut calculer la valeur moyenne

$$\left\langle \cos^2 \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi(M) \right) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi(M) \right) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos \left(\frac{4\pi t}{T} - 2\varphi(M) \right) dt$$

où on a utilisé la relation $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. Cette relation se retrouve directement en faisant la somme des relations bien connues $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$. On en déduit

$$\left\langle \cos^2 \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi(M) \right) \right\rangle = \frac{1}{2T} [t]_0^T + \frac{1}{2T} \frac{T}{4\pi} \left[\sin \left(\frac{4\pi t}{T} - 2\varphi(M) \right) \right]_0^T = \frac{1}{2}.$$

On constate que ce résultat peut s'écrire $I(M) = \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t)$ où la notation z^* représente le nombre complexe conjugué de z .

Propriété. Pour une onde issue d'une source monochromatique idéale, l'intensité lumineuse au point M vaut

$$I(M) = \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t) = \frac{1}{2} \underline{s}(M) \underline{s}^*(M) = \frac{1}{2} a(M)^2$$

avec $a(M)$ l'amplitude réelle de la vibration lumineuse au point M et $\underline{s}(M)$ son amplitude complexe.

2 Émetteurs de lumières et superposition d'ondes

2.1 Les sources de lumière

2.1.1 Lumière et spectre lumineux

Définition. Les **sources primaires** sont naturellement lumineuses et émettent leur propre lumière, comme le Soleil, les ampoules... Les **sources secondaires** réémettent une lumière reçue, comme la Lune, un mur...

Le processus d'émission de la lumière peut être dû à différents processus physiques :

- ▷ les lampes **thermiques**, qui émettent de la lumière à cause de leur température élevée (Soleil, ampoules...), pour lesquelles le spectre de la lumière émise est continu (figure 7a);
- ▷ les lampes **spectrales**, qui émettent de la lumière à cause de l'excitation de certains atomes (tubes électroluminescent ou « néon », LED...), pour lesquelles le spectre de la lumière émise est discret (figure 7b), seules certaines longueurs d'ondes sont émises;
- ▷ la lumière **LASER**⁵, qui est une source purement artificielle et est très proche d'une source purement monochromatique.

Dans le cours, on supposera que toutes les sources lumineuses sont purement **monochromatiques**, c'est-à-dire qu'elle ne contiennent qu'une seule fréquence sans étalement du spectre lumineux. Ce modèle est purement idéal et n'existe pas dans la réalité, mais permet de bien décrire les processus.

Les différentes allures des spectres des différentes lampes sont schématisée figure 8.

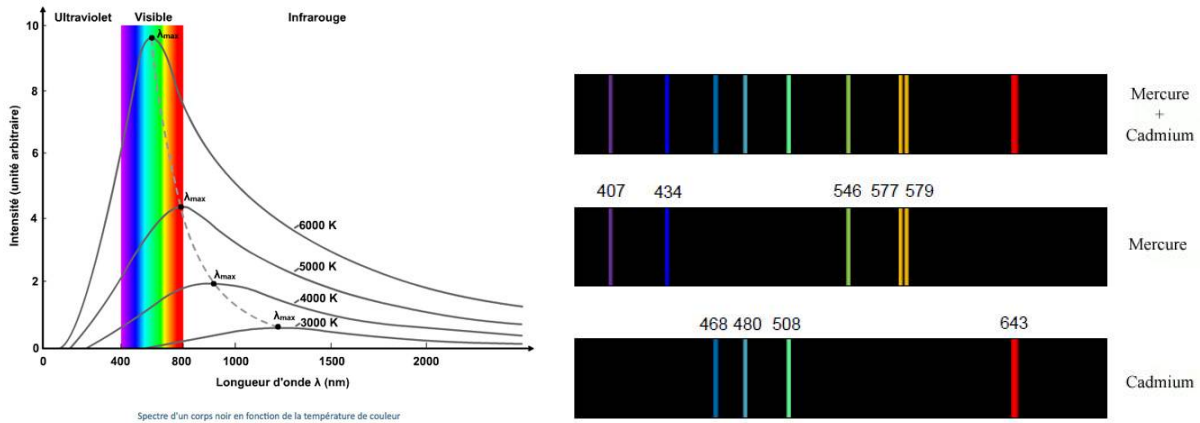
2.1.2 Modèle des trains d'onde

La lumière est portée par des particules, les photons. Ceux-ci sont émis par désexcitation spontanée ou stimulée d'un atome. Lors du processus, un électron passe d'une couche électronique supérieure à une couche électronique inférieure. Le photon de fréquence ν vérifie la relation de Planck-Einstein $\Delta\mathcal{E} = h\nu$ avec $\Delta\mathcal{E}$ la différence d'énergie entre les niveaux atomiques et h la constante de Planck.

Remarque : *En toute rigueur, la fréquence de chaque photon est aléatoire. L'inégalité de Heisenberg impose une très légère dispersion de la fréquence autour de la valeur centrale donnée par la relation de Planck-Einstein.*

Or, les photons, comme toutes les particules, ont un double caractère, ils sont aussi décrit par une onde. L'onde décrivant un photon est une onde de durée limitée τ , qui correspond à la durée du processus de désexcitation atomique. Ce temps est généralement compris entre 10^{-6} s et 10^{-9} s. Ensuite, par un processus physique apportant de l'énergie (thermique, électrique...), l'atome est à nouveau excité, permettant une émission ultérieure d'un autre photons. Ces processus sont fondamentalement aléatoires.

5. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.



(a) Spectre d'émission d'une lampe thermique (b) Spectres d'émissions de lampes spectrales

Fig. 7 – Spectres d'émissions de lampe thermique ou spectrales.

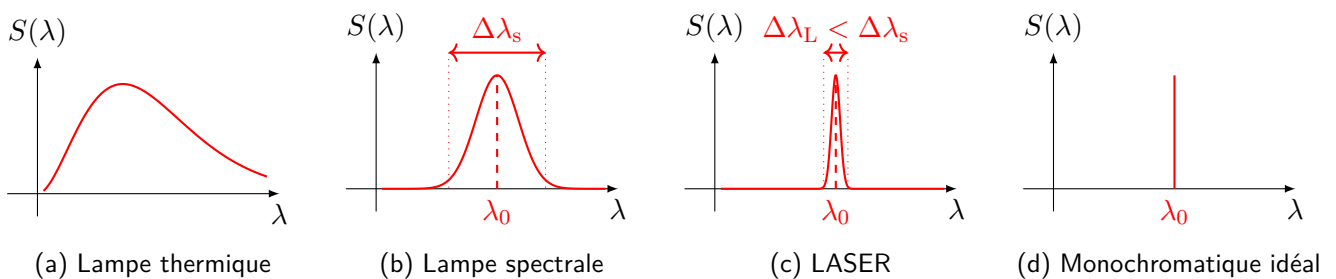


Fig. 8 – Allure des différents spectres des sources lumineuses.

Propriété. L'onde décrivant un photon est modélisée par un **train d'onde** de durée finie. On modélise le signal vibratoire du train d'onde au niveau de la source par

$$s_{\text{train d'onde}} = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

avec $\omega = 2\pi f = 2\pi c/\lambda$ et φ_0 la phase à l'origine. La phase à l'origine est **aléatoire**. La fréquence d'un photon dépend de la transition de niveau électronique et est très légèrement aléatoire.

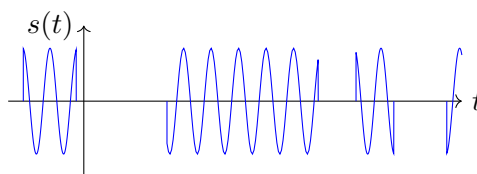


Fig. 9 – Vibration lumineuse émise par émission de photons par un atome en ne considérant qu'une unique transition de niveaux électroniques. Chaque train d'onde représente un photon qui ont tous une fréquence très proche, une durée aléatoire et une phase à l'origine aléatoire.

Il est à noter que la phase n'est aléatoire que dans le cas d'émission spontanée de photon. Lors de l'émission stimulée, un photon incident déclenche la désexcitation atomique et deux photons identiques au premier sont émis, la phase du second photon n'est donc pas aléatoire.

2.2 Superposition d'ondes lumineuses

Considérons deux sources lumineuses situées en S_1 et S_2 . Sans perdre de généralité, on peut se restreindre à l'étude de sources monochromatiques idéales, les sources réelles pouvant être reconstruites à posteriori en réalisant l'intégrale sur le spectre. On note donc les signaux émis

$$s_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1^0(t)) \quad \text{et} \quad s_2(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2^0(t))$$

avec $\varphi_i^0(t)$ la phase à l'origine qui est une fonction aléatoire du temps à cause du modèle des trains d'ondes.

Ces deux sources émettent des rayons lumineux qui se croisent au point M , par définition les deux vibrations lumineuses sont alors

$$s_1(t, M) = a_1 \cos \left(\omega_1 t + \varphi_1^0(t) + \frac{2\pi}{\lambda_1}(S_1 M) \right) \quad \text{et} \quad s_2(t) = a_2 \cos \left(\omega_2 t + \varphi_2^0(t) + \frac{2\pi}{\lambda_2}(S_2 M) \right) .$$

Par définition, l'état vibratoire au point M est la somme des deux ondes, soit $s(t, M) = s_1(t, M) + s_2(t, M)$. il faut source identique, et lambda identique

L'intensité lumineuse est alors $I(M) = \langle s(t, M)^2 \rangle$ soit

$$I(M) = \langle s_1(t, M)^2 \rangle + \langle s_2(t, M)^2 \rangle + 2 \langle s_1(t, M)s_2(t, M) \rangle = I_1(M) + I_2(M) + 2 \langle s_1(t, M)s_2(t, M) \rangle$$

avec $I_1(M)$ (resp. $I_2(M)$) l'intensité de l'onde une (resp. deux) seule au point M .

Propriété. L'intensité lumineuse en un point M est la somme des intensités des radiations lumineuses incidentes à laquelle on ajoute le terme d'interférence $2 \langle s_1(t, M)s_2(t, M) \rangle$.

Étudions plus en détail ce terme d'interférence, on a

$$\begin{aligned} & \langle s_1(t, M)s_2(t, M) \rangle \\ &= 2a_1a_2 \langle \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t, M)) \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t, M)) \rangle \\ &= a_1a_2 [\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1(t, M) + \varphi_2(t, M)) \rangle + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1(t, M) - \varphi_2(t, M)) \rangle] \end{aligned}$$

où on a écrit la phase $\varphi_i(t, M) = \varphi_i^0(t) + \frac{2\pi}{\lambda_i}(S_i M)$ et où on a utilisé $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

Le premier terme est la valeur moyenne d'un signal cosinus pris sur le temps de réponse du détecteur. En toute rigueur, ce terme n'est pas nul car la valeur moyenne n'est pas nécessairement prise sur un nombre entier de périodes du cosinus. Toutefois, ce terme sera toujours négligeable devant l'intensité de chacune des sources qui tiennent compte de toutes les périodes. On considère donc que ce terme est nul.

Le second terme est aussi nul sauf si $((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1(t, M) - \varphi_2(t, M))$ est indépendant du temps. Cela implique nécessairement $\omega_1 = \omega_2$, soit une égalité des fréquences et donc des longueurs d'ondes. On note λ la longueur d'onde commune.

Mais on a aussi

$$\varphi_1(t, M) - \varphi_2(t, M) = \varphi_1^0(t) - \varphi_2^0(t) + \frac{2\pi}{\lambda}(S_1 M) - \frac{2\pi}{\lambda}(S_2 M) .$$

Or φ_1^0 et φ_2^0 sont des fonctions aléatoires du temps. Leur différence est donc aussi une fonction aléatoire. La phase est donc aléatoire et la valeur moyenne est nulle, sauf si $\varphi_1^0(t) = \varphi_2^0(t)$, ce qui n'est possible que si on considère que les deux ondes décrivent le même train d'onde en permanence.

Propriété. Le terme d'interférence $2 \langle s_1(t, M)s_2(t, M) \rangle$ est non nul **uniquement** dans le cas où les deux ondes sont issues de la même source et représentent le même train d'onde. Autrement dit, un photon ne peut interférer qu'avec lui-même. On dit dans ce cas que les ondes lumineuses sont **cohérentes**. Dans tous les autres cas, les ondes sont **incohérentes** et le terme d'interférence est nul. L'intensité résultante est simplement la somme des intensités de chaque onde prise séparément.

Cette propriété extrêmement restrictive rend les interférences optiques très délicates à obtenir. Pour faire interférer un photon avec lui-même, il faut soit lui faire parcourir deux chemins différents puis faire converger ces deux chemins. On constate donc que le double caractère onde/corpuscule est un point essentiel de l'interprétation des interférences optiques.

2.3 Interférences à deux ondes

Considérons une source monochromatique de lumière λ . Par un dispositif optique, le faisceau lumineux est séparé en deux ondes empruntant des chemins différents pour arriver au point M . On note $(SM)_1$ le chemin optique correspondant au chemin 1 et $(SM)_2$ le chemin optique correspondant au chemin 2. Les deux ondes sont cohérentes et le terme d'interférence est non nul.

La phase à l'origine des deux ondes est identique, on choisit de la prendre nulle ce qui est toujours possible qui à translater l'origine des temps. Selon le dispositif optique, l'amplitude des deux ondes peut être différentes.

On a donc

$$s_1(t, M) = a_1 \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_1 + \varphi_0 \right) \quad \text{et} \quad s_2(t) = a_2 \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_2 + \varphi_0 \right).$$

Le signal total s'écrit $s(t, M) = s_1(t, M) + s_2(t, M)$. Les deux signaux ayant la même pulsation, on peut utiliser la notation complexe

$$\underline{s}(t, M) = \left(a_1 \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_1 \right] + a_2 \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_2 \right] \right) \exp[i\omega t + \varphi_0].$$

Dans ce cas, on a directement

$$\begin{aligned} I(M) &= \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t); \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1 \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_1 \right] + a_2 \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_2 \right] \right) \left(a_1 \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_1 \right] + a_2 \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_2 \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{a_1 a_2}{2} \left(\exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right] + \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right] \right) \end{aligned}$$

où l'on a défini la différence de marche $\delta = (SM)_1 - (SM)_2$.

Remarque : La différence de marche étant dans un cosinus, le problème est inchangé si l'on prend $(SM)_1 - (SM)_2$ ou $(SM)_2 - (SM)_1$.

Il vient, en reconnaissant la formule de Moivre définissant le cosinus,

$$I(M) = \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 + a_1 a_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right).$$

Remarque : Cette formule se trouve directement après le calcul temporel du paragraphe précédent après avoir choisi $\varphi_1^0 = \varphi_2^0$. Le choix de la méthode de calcul entre un calcul temporel ou complexe est laissé à la libre appréciation de l'étudiant.

Or $\frac{1}{2} a_1^2 = I_1(M)$ et $\frac{1}{2} a_2^2 = I_2(M)$ sont les intensités lumineuses des ondes seules. On en déduit donc que $a_1 a_2 = 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}$.

Propriété. La **formule de Fresnel** indique que l'intensité lumineuse au point M résultant de la superposition de deux ondes cohérentes d'intensité $I_1(M)$ et $I_2(M)$ vaut

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right)$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide et $\delta = \pm((SM)_1 - (SM)_2)$ la différence de marche des signaux.

Le **déphasage** entre les deux signaux est $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ avec λ la longueur d'onde dans le vide.

Remarque : Le choix de la différence de marche doit être clairement signifié en début de chaque exercice.

2.3.1 Les interférences

Lorsque l'amplitude des vibrations de deux sources cohérentes s'ajoutent, le terme d'interférence est non nul et on observe, par définition, des interférences⁶.

6. On pourra revoir à ce sujet le chapitre de première année correspondant.

Lorsque que les deux vibrations lumineuses interfèrent et que le résultat de l'interférence est d'amplitude maximale, on parle **d'interférences constructives**.

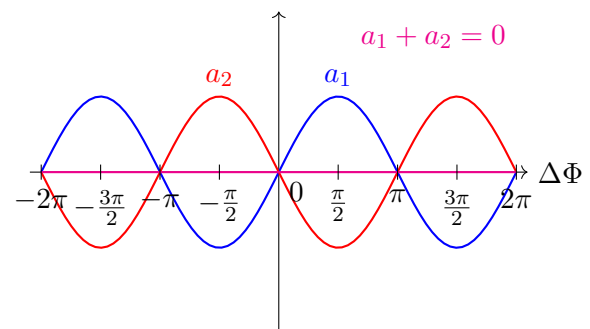
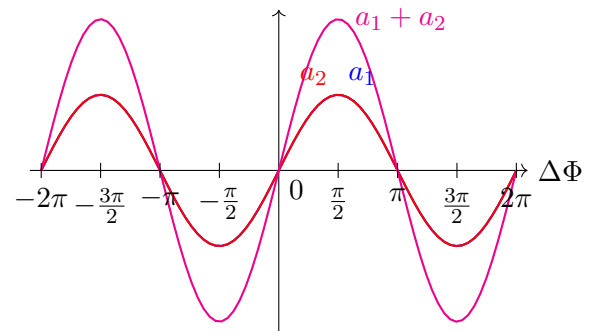
Mathématiquement, cela implique un déphasage nul $\Delta\Phi = 0[2\pi]$. On dit que les deux signaux sont **en phase**.

Dans ce cas $\delta = 0[\lambda]$, l'intensité lumineuse résultant de la formule de Fresnel vaut $I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$. Cette intensité est donc maximale.

Lorsque que les deux vibrations lumineuses interfèrent et que le résultat de l'interférence est nul, on parle **d'interférences destructives**.

Mathématiquement, cela implique un déphasage de π , soit $\Delta\Phi = \pi[2\pi]$. On dit que les deux signaux sont **en opposition de phase**.

Dans ce cas $\delta = \frac{\lambda}{2}[\lambda]$, l'intensité lumineuse résultant de la formule de Fresnel vaut $I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$. Cette intensité est minimale.



Définition. On définit l'**ordre d'interférence** par $p = \frac{\delta}{\lambda}$. C'est un nombre sans unité. Il est entier pour les interférences constructives et demi-entier pour les interférences destructives.

L'ordre d'interférence permet de compter les interférences constructives, l'ordre nul correspond par définition à $\delta = 0$ soit une différence de marche nulle.

2.3.2 Le facteur de contraste

Définition. On définit le **contraste** par la relation $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ où I_{\max} et I_{\min} représentent l'intensité lumineuse maximale et minimale donnée sur zone d'observation.

Dans le cas d'une interférence à deux ondes constructives, on obtient directement $C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$.

On note $x = I_1/I_2$ en supposant que $I_2 > I_1$ (sinon, on prend l'inverse). Dans ce cas, x varie entre 0 et 1. On a $C(x) = 2\sqrt{x}/(1+x)$. Cette fonction est strictement croissante et est maximale pour $x = 1$.

Propriété. Le contraste est maximal si $I_1 = I_2$. Dans ce cas, la formule de Fresnel devient

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right).$$

Les interférences destructives sont d'intensité nulle alors que les interférences constructives sont deux fois plus lumineuse que la somme incohérente des intensités.

En cas de contraste nul, les intensités maximales et minimales sont égales, on ne voit plus d'interférences. On parle alors de **brouillage** des interférences.

2.4 Exemple du réseau de fentes rectilignes parallèle

Considérons un dispositif constitué de N fentes rectilignes parallèles espacées de a . Une onde plane est incidente sur le dispositif comme représenté sur la figure 10. En arrivant sur une fente, les rayons sont diffractés dans toutes les directions. On observe l'image à l'infini, soit dans le plan focal image d'une lentille convergente. Ainsi, on ne considère que les rayons parallèles entre eux en sortie du dispositif

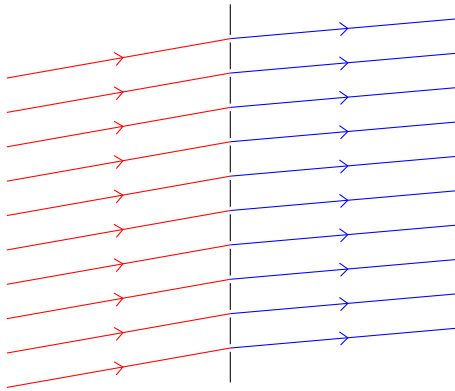


Fig. 10 – Incidence d'une onde plane sur un réseau de fentes.

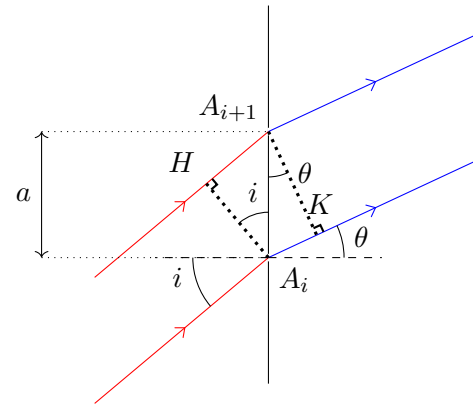


Fig. 11 – Déphasage entre deux rayons passant par deux fentes successives.

Différence de marche entre deux rayons successifs : Tous les rayons sont issus d'une même onde plane, et donc par définition de la même source. Pour une longueur d'onde donnée, ils constituent donc un ensemble de rayons cohérents de longueur d'onde λ .

Considérons deux rayons successifs comme décrits figure 11 et calculons la différence de marche correspondante. On a

$$\delta = (SM)_i - (SM)_{i+1} = (SA_i) + (A_iM) - ((SA_{i+1}) + (A_{i+1}M)) .$$

Notons H le projeté orthogonal de A_i sur le rayon $i + 1$. La droite portée par A_iH est orthogonale aux deux rayons incidents. En application du théorème de Malus, il s'agit d'un plan d'onde et donc $(SH) = (SA_i)$.

Notons K le projeté orthogonal de A_{i+1} sur le rayon i . La droite portée par $A_{i+1}K$ est orthogonale aux deux rayons émergents. On ne peut pas appliquer le théorème de Malus ici car il y a une diffraction au niveau des fentes. Toutefois, inversons le problème. Par le principe du retour inverse de la lumière, si on place une source en M , les rayons émergents deviennent des rayons incidents. On peut appliquer le théorème de Malus et en déduire que la droite portée par $A_{i+1}K$ est un plan d'onde pour une source placée en M soit $(MK) = (MA_{i+1})$.

Ainsi, on a

$$\delta = (SA_i) + (A_iK) + (KM) - ((SH) + (HA_{i+1}) + (A_{i+1}M)) = (A_iK) - (HA_{i+1}) .$$

Ensuite, il suffit d'appliquer les relations trigonométriques dans la figure 11 pour constater que

$$\delta = a(\sin \theta - \sin i) .$$

La condition d'interférence constructive implique

$$\boxed{k\lambda = a(\sin \theta - \sin i)} .$$

Cette relation se nomme la **formule des réseaux**. On constate que l'angle θ des interférences constructives dépend de λ et de k . Il est ainsi possible de séparer les différentes longueurs d'ondes d'une source lumineuse.

3 Compléments

3.1 Interférences à N ondes

Le raisonnement du paragraphe précédent s'étend directement à une somme de N ondes cohérentes. Reprenons l'exemple du réseau à fente parallèle.

3.1.1 Calcul général de l'intensité lumineuse pour N ondes de phase en progression arithmétique

Vibration lumineuse totale : On constate que le raisonnement précédent est valide quels que soient les rayons successifs de la figure 10. Ainsi, en notant \underline{a}_0 l'amplitude complexe de l'onde traversant le premier trou, on a

$$\underline{a}(M) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{a}_0 \exp \left[i \frac{2\pi k}{\lambda} \delta \right].$$

Notons φ_M le déphasage entre les deux rayons au point M . Le calcul suivant se retrouve dans différentes configurations autre que les réseaux. On a par définition

$$\underline{a}(M) = \sum_{k=0}^N \underline{a}_0 \exp [ik\varphi_M] = \underline{a}_0 \sum_{k=1}^{N-1} (\exp [i\varphi_M])^k$$

où l'on a simplement utilisé les propriétés de l'exponentielle. On reconnaît une série géométrique, on a donc

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_0 \frac{1 - (\exp [i\varphi_M])^N}{1 - \exp [i\varphi_M]} = \underline{a}_0 \frac{1 - (\exp [iN\varphi_M])}{1 - \exp [i\varphi_M]}.$$

L'astuce consiste maintenant à factoriser l'exponentielle par le demi-angle car $1 - e^a = e^{a/2}(e^{-a/2} - e^{a/2})$ soit

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_0 \frac{\exp \left[\frac{iN\varphi_M}{2} \right] \exp \left[-\frac{iN\varphi_M}{2} \right] - \exp \left[\frac{iN\varphi_M}{2} \right]}{\exp \left[\frac{i\varphi_M}{2} \right] \exp \left[-\frac{i\varphi_M}{2} \right] - \exp \left[\frac{i\varphi_M}{2} \right]}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Moivre permettant de faire apparaître des sinus et utiliser l'imparité de celui-ci pour obtenir

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_0 \frac{\exp \left[\frac{iN\varphi_M}{2} \right] \sin \left[\frac{N\varphi_M}{2} \right]}{\exp \left[\frac{i\varphi_M}{2} \right] \sin \left[\frac{\varphi_M}{2} \right]}.$$

On calcule maintenant l'intensité avec la formule sur les amplitudes complexes, et on obtient

$$I(M) = I_0 \left(\frac{\sin \left[\frac{N\varphi_M}{2} \right]}{\sin \left[\frac{\varphi_M}{2} \right]} \right)^2$$

avec $I_0 = \frac{1}{2} \underline{a}_0 \underline{a}_0^*$ et φ_M le déphasage final entre deux rayons successifs au point M .

On peut tracer cette fonction pour diverses valeurs de N comme cela est représenté figure 12.

Remarque : En réalité, l'amplitude est modérée par la diffraction. Ainsi, les pics secondaires sont moins lumineux que le pic principal d'ordre 0.

3.1.2 Séparation des ordres d'interférences

En observant les tracés de la figure 12, on constate que, plus N est grand, plus l'intensité est quasi nulle partout sauf en $\varphi_M = 0$. Cela s'explique par les très nombreuses annulation du numérateur. De plus, en $\varphi_M \approx 0$, on peut réaliser un développement limité de la fonction, on a

$$\frac{I(0)}{I_0} = \lim_{\varphi_M \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left[\frac{N\varphi_M}{2} \right]}{\sin \left[\frac{\varphi_M}{2} \right]} \right)^2 = \lim_{\varphi_M \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{N\varphi_M}{2}}{\frac{\varphi_M}{2}} \right)^2 = N^2.$$

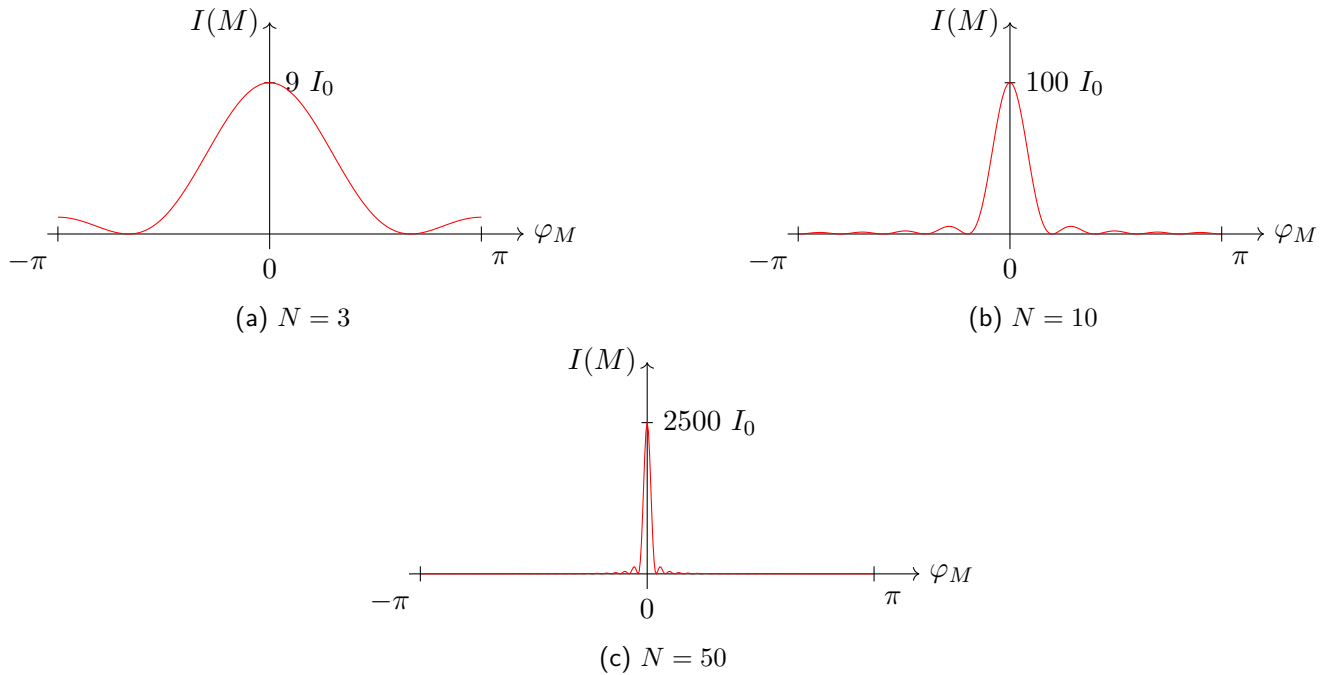


Fig. 12 – Tracé de l'intensité lumineuse observée pour des interférences à N ondes de phase en progression arithmétique en fonction du déphasage au point M entre deux rayons successifs φ_M . La figure est 2π périodique et peut être reconstruite par périodicité.

De plus, calculons la largeur de ce pic en cherchant le premier angle annulant l'intensité. Cet angle vérifie la relation $\sin\left(\frac{N\varphi_M}{2}\right) = 0$ soit $\varphi_M = \frac{2\pi}{N}$. La largeur du pic vaut donc $\Delta\varphi_N = \frac{4\pi}{N}$.

La figure d'interférences de N ondes cohérentes d'intensité individuelle I_0 et de phase en progression arithmétique est constitué de pic

- ▷ très brillants d'intensité valant $N^2 I_0$;
- ▷ de largeur en phase valant $\frac{4\pi}{N}$.

Revenons à la formule des réseaux. Pour simplifier le raisonnement, nous nous plaçons dans les conditions expérimentales les plus simples, soit l'incidence normale. Dans ce cas, $i = 0$ et la condition d'interférence constructive implique

$$\delta = k\lambda = a \sin \theta$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. On constate que k est directement l'ordre d'interférence.

L'étalement angulaire de chaque ordre est donné par la relation précédent. On a

$$\varphi_N = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta .$$

En différenciant cette relation, on a

$$d\varphi_N = \frac{2\pi a}{\lambda} \cos \theta d\theta \quad \implies \quad \frac{4\pi}{N} = \Delta\varphi_N = \frac{2\pi a}{\lambda} |\cos \theta| \Delta\theta .$$

L'étalement angulaire d'un ordre d'interférence faut donc $\Delta\theta_N = \frac{2\lambda}{Na |\cos \theta|}$.

De plus, si nous considérons deux longueur d'ondes proches λ et $\lambda + \Delta\lambda$, elles sont incohérentes et leurs intensités s'ajoutent. Elles vont vérifier toutes deux la condition d'interférences constructives. En différentiant des relation, on a $k d\lambda = a \cos \theta d\theta$ soit un écart entre les deux raies de $\Delta\theta_\lambda = \frac{k}{a |\cos \theta|} \Delta\lambda$.

Il est possible de séparer deux raies si l'étalement angulaire d'une raie $\Delta\theta_N/2$ est inférieure à l'écart

angulaire entre les deux maxima Δ_λ soit

$$\Delta_\lambda > \frac{1}{2} \Delta\theta_N \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{a|\cos\theta|} \Delta\lambda > \frac{\lambda}{Na|\cos\theta|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} > \frac{1}{kN}}.$$

Ce critère $\Delta\theta_N/2$ se comprend car l'intensité n'est pas constante. Une superposition des ordres quand l'un est nettement plus lumineux que l'autre est toujours séparable. Ce critère s'appelle critère de Rayleigh.

Les raies sont donc mieux séparées pour les ordres supérieurs, à condition que suffisamment de fentes soient présentes. La situation est représentée figure 13. Un tel dispositif permet de réaliser de la spectro-métrie, c'est-à-dire une mesure des longueurs d'ondes présentes dans un spectre d'une source spectrale à l'aide d'un goniomètre.

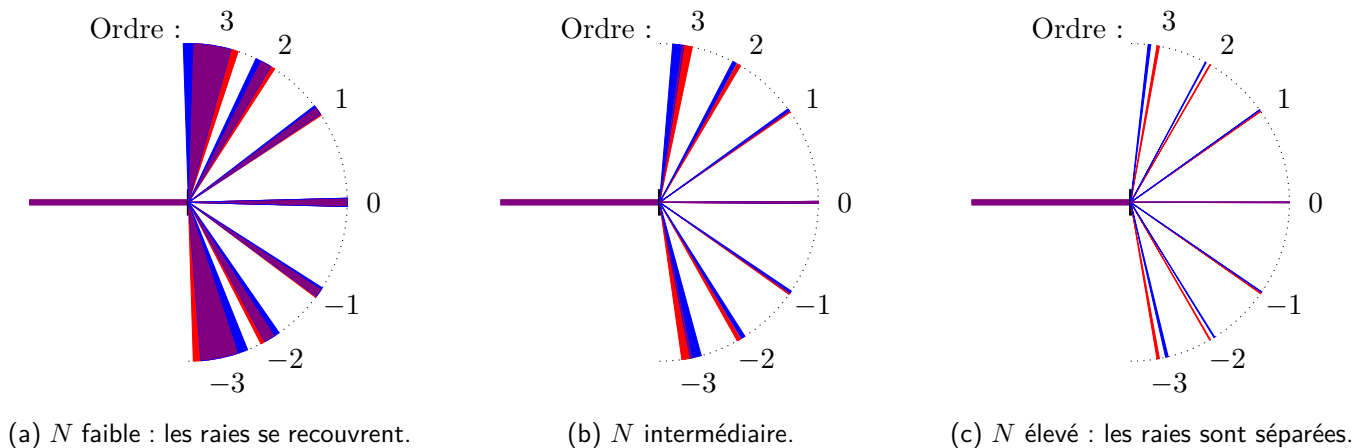


Fig. 13 – Séparation des raies spectrales à l'aide d'un réseau. L'observation se fait à l'infini, soit dans le plan focal image d'une lentille ou à travers une lunette auto-collimatrice pour une observation à l'œil. Une onde plane incidence contenant deux longueurs d'ondes arrive sur le réseau. Les raies spectrales sont séparées pour les ordres élevés à condition que le nombre de fentes soit suffisant.

3.2 Principe de Fermat et théorème de Malus

Cette démonstration est hors programme et est donnée pour la culture.

3.2.1 Principe de Fermat

Le principe de Fermat est un principe fondamental de l'optique géométrique, qui permet notamment de retrouver les hypothèses de l'optique géométrique. Il s'énonce ainsi.

Théorème. Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B correspond à une valeur *stationnaire* du chemin optique par rapport aux trajets fictifs voisins allant de A vers B .

Il s'agit d'un grand type de principe de physique théorique que l'on retrouve dans d'autres domaines.

Ce principe peut aussi s'énoncer en terme de temps de trajet de la lumière. En effet, comme vu précédemment, le chemin optique est proportionnel à celui-ci.

Pour préciser la signification de cet énoncé, considérons la courbe \mathcal{C} allant de A à B et correspondant effectivement au trajet suivi par la lumière. Soit M le point courant de \mathcal{C} , les chemins voisins de \mathcal{C} sont des courbes \mathcal{C}' obtenues en donnant à chaque point M de \mathcal{C} un déplacement élémentaire. En notant ε le maximum des distances MM' , on dit que \mathcal{L}_{AB} est stationnaire si $|\mathcal{L}'_{AB} - \mathcal{L}_{AB}|$ est, au plus, de l'ordre de ε^2 .

Mathématiquement, on peut montrer que le principe de Fermat peut être reformulé en disant que le trajet effectivement suivi par la lumière est un extrémum local du chemin optique. Bien souvent, ce sera un minimum de celui-ci.

Par exemple, considérons un trajet en ligne droite ci-contre et un chemin fictif voisin.

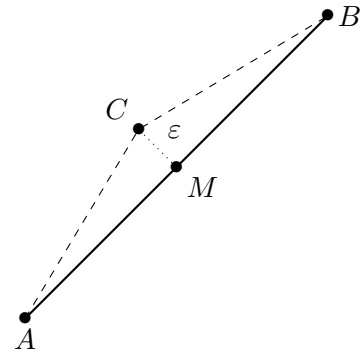
On a

$$\mathcal{L}_{ACB} = AC + CB = \sqrt{\varepsilon^2 + AM^2} + \sqrt{\varepsilon^2 + MB^2}.$$

On peut réaliser un développement limité d'ordre 1 qui conduit à

$$\mathcal{L}_{ACB} \approx AM \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{AM^2} \right) + MB \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{MB^2} \right) = \mathcal{L}_{AB} + k\varepsilon^2$$

avec k une constante.



La différence entre les deux distances est bien un infiniment petit d'ordre 2. On peut généraliser ce calcul à une infinité de déplacements infinitésimaux le long de la courbe. Ainsi, dans un milieu homogène, le trajet en ligne droite est bien stationnaire.

On retrouve donc que la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène.

De plus, le principe de retour inverse est une conséquence immédiate du principe de Fermat. En effet, si le chemin optique de A vers B est stationnaire, le chemin optique de B vers A l'est aussi.

3.2.2 Résultat intermédiaire

Désignons par A et B les extrémités d'un segment et par AB sa longueur. On a par définition $AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$.

Soient $d\vec{OA}$ et $d\vec{OB}$ les déplacements élémentaires de B et A , et O un point fixe.

Écrivons la différentielle de AB^2 . On a

$$2ABdAB = dAB^2 = d(\vec{AB} \cdot \vec{AB}) = 2\vec{AB} \cdot d\vec{AB}.$$

Or

$$d\vec{AB} = d(-\vec{OA} + \vec{OB}) = d\vec{OB} - d\vec{OA}.$$

En notant $\vec{u} = \vec{AB}/AB$, il vient

$$dAB = \vec{u} \cdot (d\vec{OB} - d\vec{OA}).$$

3.2.3 Démonstration

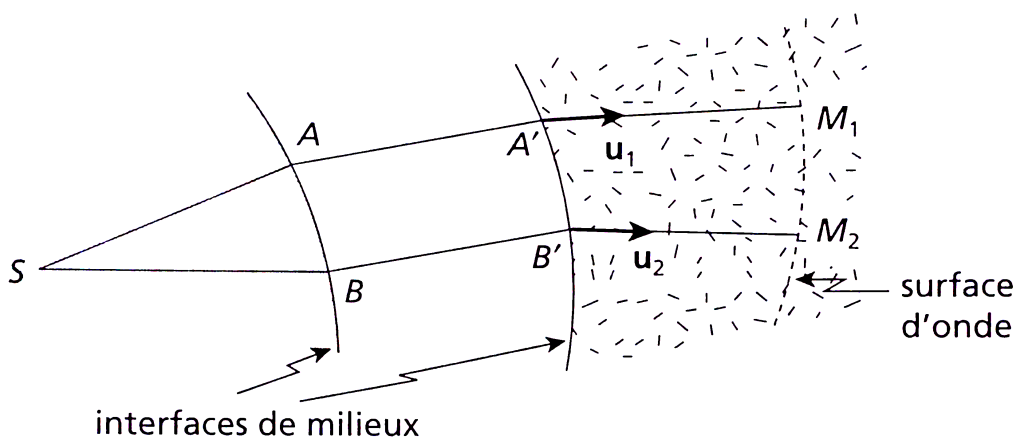


Fig. 14 – Illustration permettant de démontrer le théorème de Malus

Reportons nous aux notations de la figure 14. Considérons deux rayons voisins $SAA'M_1$ et $SBB'M_2$, les points M_1 et M_2 appartenant par hypothèse à la même surface d'onde. Par définition de celle-ci, on a

$$(SM_1) = (SM_2)$$

soit plus explicitement

$$(SAA'M_1) = (SBB'M_2) .$$

Or pour aller de S à M_2 , la lumière aurait pu prendre le trajet $SAA'M_2$, voisin du trajet $SBB'M_2$. D'après le principe de Fermat, les chemins optiques correspondants sont égaux au second ordre près, soit

$$(SAA'M_2) = (SBB'M_2) .$$

On déduit de ces deux relations

$$(SAA'M_1) = (SAA'M_2) .$$

M_1 et M_2 sont voisins par hypothèse, on peut appliquer le résultat du paragraphe précédent, on a alors, avec \vec{u}_1 le vecteur unitaire porté par le rayon $SAA'M_1$ au point M_1 (cf figure 14),

$$dA'M_1 = \vec{u}_1 \cdot (d\overrightarrow{OM_1} - d\overrightarrow{OA'}) = \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$

car A' est fixe et le déplacement élémentaire de M_1 est par définition le passage de M_1 vers M_2 .

Or le théorème de Malus indique que $dA'M_1$ est nul, au moins au premier ordre, et donc $\vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le petit déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ s'effectuant sur la surface d'onde. On peut donc prendre ce vecteur suffisamment petit pour représenter la tangente à la surface d'onde. Ainsi, \vec{u}_1 est orthogonal à la tangente à la surface d'onde, il est donc porté par la normale en M_1 à la surface d'onde, ce qui démontre le théorème de Malus.