

Contenu du programme officiel :

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type. Incertitudes-types composées.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale. Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure. Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

En gras les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Table des matières

1 Variabilité et incertitude-type	2
1.1 La variabilité en science expérimentale.	2
1.2 L'incertitude-type.	2
1.3 Interprétation de l'incertitude-type.	3
1.4 Comparaison de deux mesures	4
2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type	5
2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)	5
2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)	7
2.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude	7
3 Les incertitudes-type composées	8
3.1 Incertitude-type composées de type somme	8
3.2 Incertitudes-type composées de type produit	8
3.3 Incertitudes-type composées quelconques	8
4 La régression linéaire	8
4.1 Principe	8
4.2 Quand utiliser une régression linéaire ?	9
4.3 Application par méthode Monte-Carlo.	9
5 Annexe : Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types	9
5.1 Incertitude-type composée.	9
5.2 Régression linéaire	10

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quelle que soit le niveau de l'expérience. L'objectif de ce document est de fournir un cadre unique pour toutes les expériences rencontrées en CPGE.

« Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation. »

GUM 2008 (dernière version) - 3.4.8

1 Variabilité et incertitude-type

1.1 La variabilité en science expérimentale

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

▷ le choix de la méthode de mesure ;

| *Exemple 1* : Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision !

▷ les variations de l'environnement ;

| *Exemple 2* : Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.

▷ les instruments de mesure ;

| *Exemple 3* : Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.

▷ le processus physique lui-même ;

| *Exemple 4* : Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité.

▷ et surtout, la personne réalisant l'expérience.

Généralement au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Il est à noter que le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel, est de patiemment faire diminuer cette variabilité. En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, un-e étudiant-e peut donc patiemment réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

1.2 L'incertitude-type

Définition. La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$.

Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Dans ce document, le résultat d'une mesure sera noté **par convention** $x \pm u(x)$.

🚫🚫🚫 **Attention !** Ce qui suit le \pm est une **incertitude-type**. Il ne s'agit pas d'une « incertitude élargie ». Cette notation synthétique peut prêter à confusion. Pour éviter cela, on peut spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir $x = \dots$ d'une part et $u(x) = \dots$ d'autre part.

On fera à ce stade deux remarques :

- ▷ pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- ▷ l'incertitude-type est l'estimation d'une variabilité qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience aient une variabilité, et donc une incertitude-type, différente.

Propriété. La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.

Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, que l'on donne généralement en pourcentage.

► **Les chiffres significatifs**

Lorsqu'on écrit un chiffre en notation scientifique, le nombre de chiffres employés dans la mantisse (le facteur avant la puissance de 10) est par définition le nombre de chiffres significatifs. Lorsqu'on écrit un chiffre en notation décimale, et que ce chiffre est inférieur à 1 en valeur absolue, ou bien n'est pas un multiple entier de 10, la définition est la même, à ceci près qu'on ne compte pas les premiers 0 à gauche.

Exemple 5 : 1.2540×10^{-2} possède 5 chiffres significatifs ; 0.0023 en possède 2 ; 1254 en possède 4 ; on ne peut pas dire combien de chiffres significatifs il y a dans 2500 , car il existe une ambiguïté : $2500 = 2.5 \times 10^3$ ou 2.500×10^3 ?

Le nombre de chiffres significatifs employés sert à communiquer une information grossière quant à l'incertitude associée à la valeur écrite, si on ne la connaît pas.

L'incertitude-type résulte d'une évaluation : on n'est jamais certain de sa valeur. Pour rappeler que l'incertitude-type est elle-même incertaine, on limite en général son nombre de chiffres significatifs à deux.

Lorsque l'incertitude-type est précisée, le nombre de chiffres significatifs de la valeur mesurée correspondante n'a plus de sens propre. On le choisit de manière à faciliter la lecture, en s'arrangeant pour que le dernier chiffre de la valeur mesurée ait la même position (dans la mantisse ou en écriture décimale) que le dernier chiffre de l'incertitude-type.

Exemple 6 : $A = 623.5 \text{ cm}^2$, $u(A) = 11.3 \text{ cm}^2$ se réécrit $A = 624 \text{ cm}^2$, $u(A) = 11 \text{ cm}^2$ ou encore de manière condensée $A = (624 \pm 11) \text{ cm}^2$ (où ce qui suit le \pm est l'incertitude-type).
De même, $L = 100 \text{ m}$, $u(L) = 1.55 \text{ cm}$ se réécrit $L = (100.000 \pm 0.016) \text{ m}$.

1.3 Interprétation de l'incertitude-type

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N .

On définit la **moyenne** \bar{x} de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i , et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

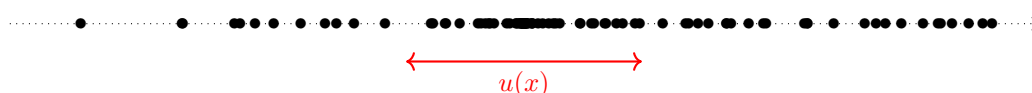


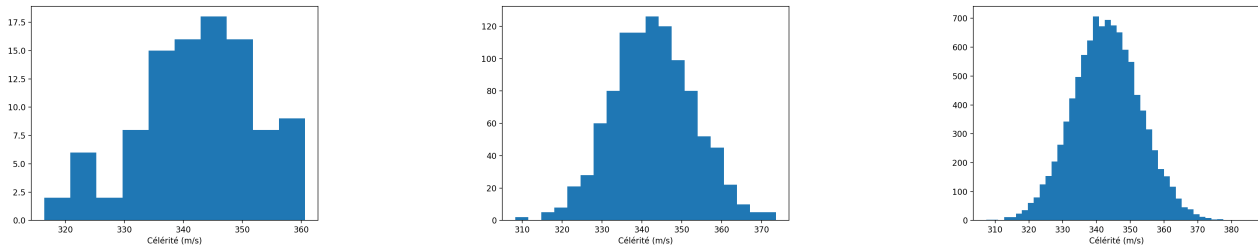
Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Propriété. L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

► Vers la distribution gaussienne

Imaginons que nous soyons capable de reproduire une expérience de mesure de temps de vol d'ultrason un très grand nombre de fois. Voici à quoi pourraient ressembler les courbes pour 100, 1 000 et 10 000 expériences.



(a) Simulation de 100 expériences.

(b) Simulation de 1 000 expériences.

(c) Simulation de 10 000 expériences.

Fig. 2 – Vers la gaussienne...

La courbe de la figure 2c est celle qui s'approche le plus d'une distribution lisse, appelée distribution gaussienne. Cette courbe « en cloche » est caractéristique de très nombreux processus de mesure. Le fait que la distribution aléatoire des résultats d'une mesure tende vers une courbe gaussienne est un résultat important en physique. Pour ces trois simulations, on trouve une valeur moyenne autour de $c_m = 343$ m/s et un écart-type de $u(c) = 10$ m/s. Le résultat de la mesure est la donnée de ces deux grandeurs.

On peut montrer que, pour une distribution gaussienne, environ 68% des résultats du processus de mesure sont comprises entre $c_m - u(c)$ et $c_m + u(c)$ et 95% sont comprises entre $c_m - 2u(c)$ et $c_m + 2u(c)$.

1.4 Comparaison de deux mesures

► Définition de l'écart normalisé

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Définition. L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes types $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par

$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}. \quad (1.1)$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé vérifie la propriété

$$E_N \lesssim 2.$$

| **Remarque :** L'écart normalisé s'appelle aussi parfois « z-score ».

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Ce seuil peut différer selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

On constate avec les trois histogrammes 3a, 3b et 3c que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment petit. Si elles se chevauchent, cela veut dire qu'il est possible que les deux processus de mesure conduisent au même résultat.

► Interprétation

Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de quelques incertitudes-type.

Pour respecter cette définition, prenons deux valeurs expérimentales que l'on souhaite comparer m_1 et m_2 , d'incertitudes-type $u(m_1)$ et $u(m_2)$. Si m_1 et m_2 peuvent être considérées comme compatibles, cela implique que la valeur 0 n'est éloignée de $m_1 - m_2$ que de quelques $u(m_1 - m_2)$.

On admet pour l'instant que $u(m_1 - m_2) = \sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}$ (ce résultat est discuté dans la partie 3.1).

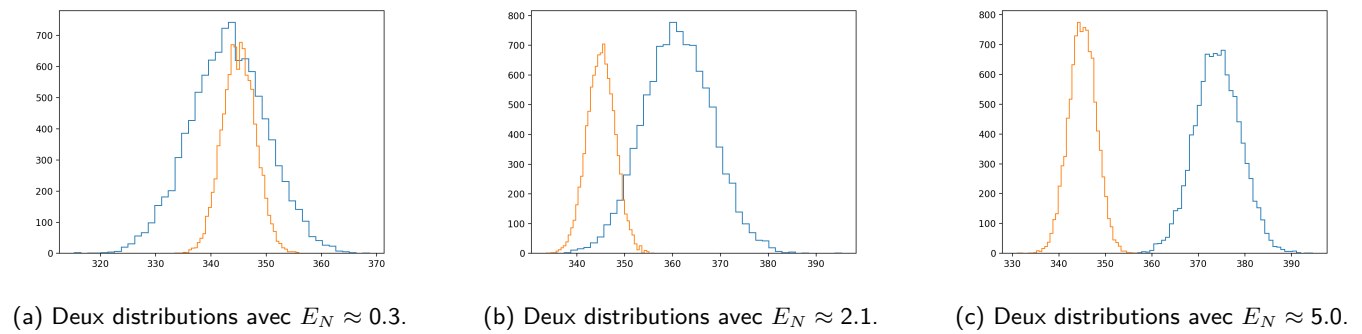


Fig. 3 – Tracé de deux distributions de résultats de mesures.

Ainsi, E_N compare $m_1 - m_2 - 0$ et $u(m_1 - m_2)$. Autrement dit, ce rapport donne le nombre d'incertitudes-type séparant 0 de $m_1 - m_2$. Si ce nombre est trop grand, 0 n'est pas compatible avec $m_1 - m_2$ et donc m_1 et m_2 ne sont pas compatibles.

Dans les trois figures 4a, 4b et 4c, la barre verticale représente la valeur 0. On constate bien que, si E_N est trop grand, alors cela implique que la valeur 0 est séparée de tous les points de mesure d'un trop grand nombre de fois l'incertitude-type.

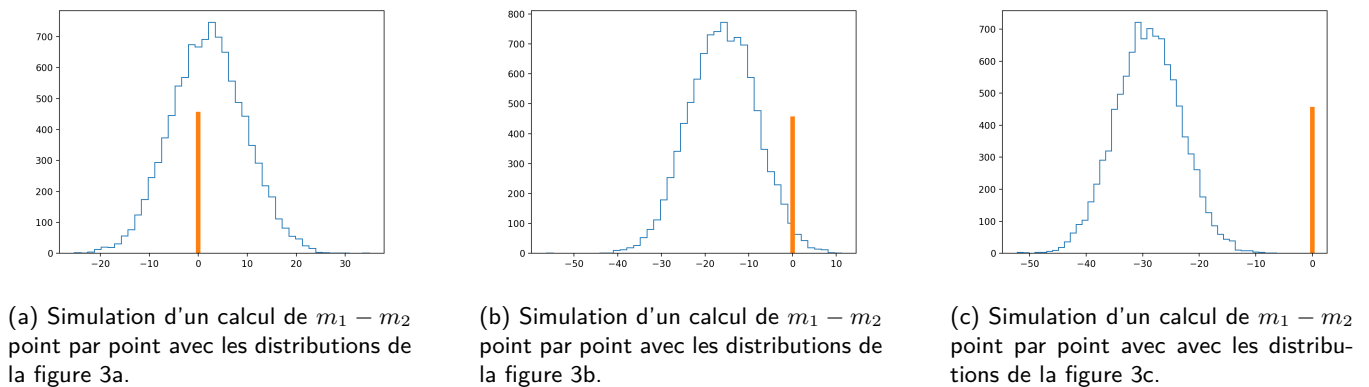


Fig. 4 – Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point.

2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type

2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Cela signifie qu'en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'appareil de mesure. En effet, selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer. Nécessairement, cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété. Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note \bar{x} la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$.

Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la distribution uniforme des données comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Ce résultat se démontre exactement en calculant l'écart-type de la distribution de probabilité $p(x)$ normalisée qui conduit à une probabilité égale pour toutes les valeurs comprises entre $\bar{x} - \Delta$ et $\bar{x} + \Delta$. Cet écart-type au carré est donné par la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx$.

Insistons sur deux remarques :

- ▷ L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0.25$ mm, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0.5$ mm. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1$ mm.
- ▷ Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. Toutefois, bien souvent, les notices ne précisent pas clairement la nature de la valeur de la précision fournie (est-ce une incertitude-type ? un intervalle ? un écart-type d'une distribution gaussienne ?). Dans ce cas, on suppose que l'incertitude affichée sur la notice est un intervalle Δ de certitude de trouver la mesure.

Comment concilier l'évaluation de type B de l'incertitude-type et le traitement statistique ?

L'évaluation de l'incertitude-type d'une mesure en prenant l'écart-type de la distribution correspond à une évaluation expérimentale de l'incertitude-type. Ainsi, on reproduit la mesure, on constate la variabilité et on la mesure grâce à sa définition. Toutefois, pour que cette mesure soit correcte, il faut que l'écart-type d'un nombre limité de points donne une bonne estimation de l'incertitude, ce qui n'est jamais certain.

Remarque : Il faut aussi que les mesures soient totalement indépendantes. Ainsi, un résultat précédent ne doit pas biaiser une mesure suivante en cherchant un résultat « dans une zone connue ».

L'évaluation de type B correspond à une évaluation majoritairement théorique de la même incertitude-type. En effet, à l'aide d'informations partielles sur le protocole de mesure, on cherche à estimer la variabilité de la mesure. Il s'agit donc d'un processus délicat nécessitant un travail de modélisation. Ce travail est souvent plus complexe à réaliser que l'expérience car toutes les causes de variabilités doivent être anticipées et réfléchies.

Ces deux évaluations correspondent donc à deux façons différentes d'estimer l'incertitude. Ces deux estimations doivent être compatibles, à condition que l'estimation expérimentale soit correctement réalisée et que la modélisation théorique décrive correctement la réalité.

On observe en pratique plusieurs situations :

- ▷ **Si l'incertitude statistique est du même ordre de grandeur que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude a intégré toutes les variabilités de l'expérience, et cela implique que l'on sait précisément pourquoi la mesure est variable car les causes d'incertitudes sont contrôlées.
- ▷ **Si l'incertitude statistique est plus grande que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude n'a pas intégré toutes les causes de variabilités de l'expérience, certaines ont pu être oubliées. L'incertitude expérimentale est donc une bonne estimation globale de la variabilité de l'expérience.
- ▷ **Si l'incertitude statistique est plus petite que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude a surestimé la variabilité de la mesure. En effet, si l'estimation théorique est correcte, cette variabilité doit apparaître en reproduisant la mesure.

Exemple 7 : Prenons une expérience de mesure de distance focale d'une lentille mince convergente. Un étudiant réalise vingt mesures de positions d'objet et d'image puis, en appliquant la relation de conjugaison, il en déduit vingt valeurs de la distance focale. En réalisant un traitement statistique, il mesure l'écart-type de la distribution de ces distances focales $u(f') = 0.15$ cm.

Ensuite, cet étudiant consciencieux estime la précision de la mesure de la position de l'objet à 1 cm et la précision de la position de l'image à 3 cm car il lui semble que l'image reste nette sur une plage assez large. À l'aide d'une simulation Monte-Carlo, il en déduit que l'incertitude de type B vaut $u(f') = 0.32$ cm.

Ainsi, en estimant la précision sur les positions, l'étudiant estime une variabilité qui est le double de la variabilité observée. L'étudiant estime donc une variabilité qui n'est pas observée. Les incertitudes sur les mesures des positions sont donc sur-estimées.

Qui plus est, en conduisant le calcul d'incertitude de type A décrite au paragraphe suivant, l'incertitude finale sur la moyenne est donnée par $u(f') = u(f')/\sqrt{20} = 0.033$ cm. Le calcul d'incertitude de type B a donc donné une incertitude largement surestimée et son estimation a pris un temps certain à l'étudiant.

Ainsi, l'estimation de type B de l'incertitude-type permet de vérifier si on maîtrise bien toutes les causes de variabilités de l'expérience. Toutefois, si on a accès à l'incertitude statistique, l'estimation de l'incertitude de type

B au niveau CPGE prend un temps certain et est souvent surestimée. Ainsi, lorsque cela est possible, on pourra se satisfaire de l'incertitude statistique.

Remarque : À un niveau universitaire de traitement des incertitudes, on choisit généralement de faire une moyenne pondérée. Les points de mesures de forte incertitude-type individuelle ont alors un poids moins fort dans l'estimation de la moyenne. Ainsi, même si elle n'est pas nécessaire à notre niveau, l'estimation des incertitude-types sur chaque point de mesure permet une meilleure estimation de la valeur finale.

2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres.

Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu'une simple estimation de l'incertitude-type sur une mesure unique.

Nous **changeons donc d'expérience**, l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

Pour estimer l'incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l'expérience et calculer l'écart-type de la distribution obtenue. Or chaque expérience est déjà la reproduction de la mesure unique un grand nombre de fois, on comprend bien que cette opération peut vite être chronophage. Heureusement, il existe une formule mathématique permettant d'estimer cet écart-type.

Propriété. On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est $\bar{x} \pm u(\bar{x})$ avec $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ la moyenne de la distribution et avec $u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$.

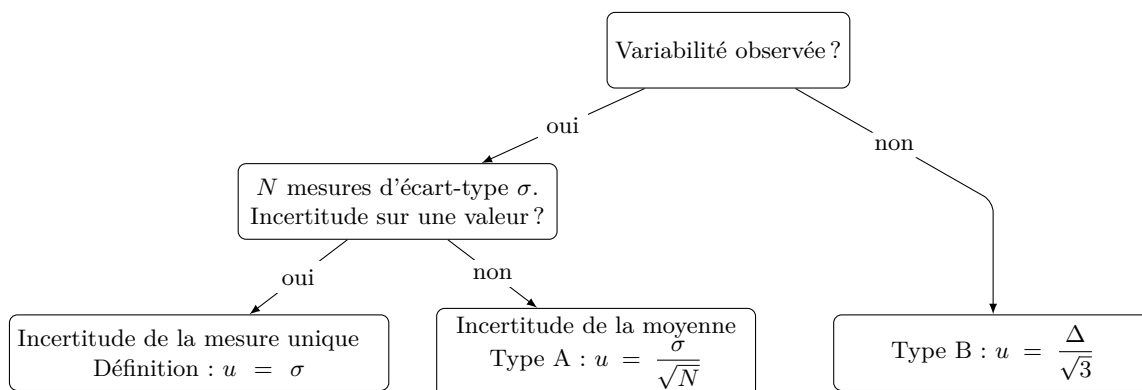
Ainsi, en une série de mesure, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à cette formule, l'incertitude-type sur la moyenne. On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de chaque prise de mesure unique.

Remarque : Cette relation se démontre avec la formule de l'incertitude composée de type somme du paragraphe suivant.

En appliquant la formule d'incertitude de type somme, on a

$$u(\bar{x}) = u\left(\sum_i \frac{x_i}{N}\right) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{u(x)}{N}\right)^2} = \sqrt{N \left(\frac{u(x)}{N}\right)^2} = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}.$$

2.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude



3 Les incertitudes-type composées

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

🔥🔥🔥 **Attention !** Les mesures doivent être indépendantes entre elles pour que ces formules soient valides.

3.1 Incertitude-type composées de type somme

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$. L'incertitude-type de y est alors donnée par

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}. \quad (3.1)$$

3.2 Incertitudes-type composées de type produit

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1^\alpha x_2^\beta$. L'incertitude-type relative de y est alors donnée par

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}. \quad (3.2)$$

On remarque que pour les formules de type produit ou fraction, il faut considérer les incertitudes relative $\frac{u(x_1)}{x_1}$. Si une des incertitudes relatives est au moins 10 fois plus grande, avec les mises au carré dans la formule, son effet sera au final 100 fois plus importante.

Propriété. Dans les formules de types produit ou fraction, on parle d'incertitude **prépondérante** si une des incertitudes relatives est 10 fois plus grande que les autres. Dans ce cas, on peut négliger les autres incertitudes.

3.3 Incertitudes-type composées quelconques

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude-type.

Définition. Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des **algorithmes de type Monte-Carlo**.

| **Remarque :** Les algorithmes de Monte-Carlo sont nombreux et ont de nombreuses applications. Leur point commun est qu'ils sont basés sur un processus aléatoire simulé informatiquement.

4 La régression linéaire

4.1 Principe

Définition. Prenons des listes de mesures x et y avec leurs incertitudes. La **régression linéaire** est une opération mathématique qui consiste à trouver les meilleurs coefficients a et b tels que $ax_i + b$ soient les plus proches en moyenne des points de mesures y_i .

| **Remarque :** En toute rigueur, il faudrait parler de régression affine et non pas linéaire.

Une régression linéaire permet de trouver la « meilleure droite » modélisant le mieux le comportement de ces points. Mathématiquement, on peut optimiser par un calcul dit « des moindres carrés » ce procédé.

🔥🔥🔥 **Attention !** Le coefficient r^2 n'a aucun intérêt pour valider un modèle physique ou pour estimer des incertitudes-type. Pour vous convaincre que le coefficient r^2 ne permet en rien de juger une régression linéaire, on peut regarder la vidéo suivante (dans laquelle le coefficient « cor » correspond au r) :

https://youtu.be/It4UA75z_KQ

4.2 Quand utiliser une régression linéaire ?

Supposons que l'on cherche à vérifier un modèle $y = ax + b$ et que l'on ait, après expérience, un ensemble de valeurs expérimentales $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ qui possèdent chacun une certaine variabilité.

La régression linéaire simple permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver une valeur de a et une valeur de b . Pour estimer l'incertitude-type de ces paramètres, il faut réaliser des ensembles de nouvelles mesures $\{x_i, y_i\}$ puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtiendra, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les paramètres. Bien souvent, un tel procédé est bien trop long et donc peu pratique.

Il faut donc mieux, lorsque c'est possible, éviter le traitement des incertitudes par régression linéaire.

- ▷ Lors d'une expérience identique réalisée par plusieurs expérimentateurs conduisant à une régression linéaire par chacun des expérimentateurs, l'incertitude-type finale est uniquement évaluée par l'étude de la variabilité des résultats de la régression linéaire. Il n'est pas nécessaire d'étudier plus en détail la régression linéaire. Dans ce cas, la régression linéaire est une des étapes du protocole de mesure, et sa variabilité est intégrée lors du calcul de variabilité final.
- ▷ Si le modèle recherché implique $b = 0$, dans ce cas, on cherche uniquement à estimer a . On peut donc calculer un grand nombre de valeur de a par la relation y_i/x_i puis réaliser un traitement statistique sur ces valeurs. Le grand intérêt est que, dans ce cas, les N points de mesures conduisent à N valeurs de a ayant une variabilité claire. Dans le cas de la régression linéaire, ces N valeurs conduisent à une unique valeur de a dont on ne peut pas directement étudier la variabilité.

Dans tous les autres cas, on peut estimer la variabilité de a et b par une simulation Monte-Carlo.

Remarque : Dans ce second cas, si le calcul de l'écart normalisé final entre la mesure de a et la valeur attendue a une valeur plus grande que 2, c'est que le modèle linéaire n'est peut être pas optimal et qu'un modèle avec un b non nul serait préférable.

4.3 Application par méthode Monte-Carlo

On commence par réaliser une régression linéaire sans incertitudes sur les valeurs mesurées. La pente et l'ordonnée à l'origine obtenues sont le résultat numérique de la mesure.

Pour estimer leurs incertitudes-type, il faut de plus estimer **pour chaque point de mesure** la valeur de son incertitude-type. Ensuite, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, on utilise cette variabilité individuelle pour générer un grand nombre de distributions de points. Pour chacune de ces distributions, on réalise une régression linéaire ce qui conduira au final à un grand nombre de valeurs de a et de b . Il suffit ensuite de réaliser une étude statistique de ces données pour en déduire leur incertitude-type.

Pour s'assurer qu'une régression linéaire est correcte, on tracera **systématiquement** sur un graphique les données mesurées ainsi que la droite de la régression linéaire. Le modèle sera validé si, à l'œil, les points de mesure sont bien alignés et que la droite passe le plus proche de tous les points possibles, en incluant leurs incertitudes-type.

Remarque : On rappelle que l'incertitude-type est une estimation de la variabilité de la mesure. Ainsi, il est naturel que les points expérimentaux soient éloignés de la valeur de la modélisation de quelques incertitudes-type.

Si l'on constate par exemple que les points ressemblent plus à une parabole qu'à une droite, la régression linéaire ne sera pas l'outil approprié.

5 Annexe : Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types

Les codes présentés dans cette partie sont réalisés sous python. Ce n'est absolument pas une obligation, les simulations peuvent être réalisées avec n'importe quel tableur pouvant réaliser un tirage de nombres aléatoires.

5.1 Incertitude-type composée

► Principe

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, \dots)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.

La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y , qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i .

Pour cela, il faut :

- ▷ Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
- ▷ Pour k entre 1 et N , réaliser
 - ▷ un tirage aléatoire pour chaque x_1 ;
 - ▷ utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
 - ▷ sauvegarder cette valeur y_k ;
- ▷ l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k . La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y .

Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.

En règle général en CPGE, les x_i sont mesurés avec une précision. En dessous de cette précision, l'étudiant est incapable d'accéder à une information sur la distribution de probabilité. On privilégie donc la **distribution uniforme de probabilité**, cohérente avec l'expérience pratique de l'étudiant. Toute autre forme de distribution doit pouvoir être justifiée et argumentée par l'étudiant.

🔴🔴🔴 **Attention !** Il ne faut pas oublier qu'en notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut $u = \Delta/\sqrt{3}$.

► Exemples

À l'aide de python, on a simulé à l'aide d'une méthode Monte-Carlo les incertitudes composées de :

- ▷ une fréquence connaissant la période ;
- ▷ une longueur entre deux points connaissant leurs positions ;
- ▷ une célérité connaissant une fréquence et une longueur d'onde ;
- ▷ une célérité connaissant la période de l'onde et la position de deux nœuds séparant 10 longueurs d'ondes ;
- ▷ une distance focale connaissant les positions de l'objet et de l'image.

Tous ces exemples sont regroupés dans un [Google Colab disponible en cliquant ici](#)¹.

5.2 Régression linéaire

► Principe

En physique-chimie, nous n'avons jamais des séries parfaites de nombres, chaque mesure a une incertitude. Supposons que nous ayons réalisé m mesures de couples (x_i, y_i) , chacun avec une incertitude-type $(u(x_i), u(y_i))$. Ces incertitudes-types peuvent être différentes pour chaque mesure.

Pour en tenir compte, on réalise une simulation Monte-Carlo en réalisant un très grand nombre de régression linéaire sur une série de points sans incertitudes. Pour obtenir ces points, on génère aléatoirement pour chaque point mesuré une valeur à l'aide des incertitudes-type expérimentales. Conformément aux préconisations du GUM, si nous n'avons pas d'information pour savoir de quelle façon générer les valeurs, on choisit une distribution de probabilité uniforme (cf. section précédente). Attention, on rappelle que pour une distribution uniforme entre $x - \Delta$ et $x + \Delta$, on a la relation $\Delta = u(x) \times \sqrt{3}$.

Les valeurs finales de la pente et de l'ordonnée à l'origine sont les moyennes de toutes leurs valeurs, et leurs incertitudes-types sont les écarts-types de ces deux ensembles de valeurs.

On note m le nombre de points de mesures. Pour la simulation Monte-Carlo, il faut réaliser le programme ci-dessous décrit en pseudo-code :

- ▷ réaliser une régression linéaire unique pour estimer la pente et l'ordonnée à l'origine ;
- ▷ fixer un nombre N très grand ;
- ▷ créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions ;
- ▷ pour chaque i compris entre 1 et N , réaliser
 - ▷ pour chaque j compris entre 1 et m , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de Y_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $y_j - \sqrt{3} \times u(y_j)$ et $y_j + \sqrt{3} \times u(y_j)$;
 - ▷ pour chaque j compris entre 1 et m , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de X_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $x_j - \sqrt{3} \times u(x_j)$ et $x_j + \sqrt{3} \times u(x_j)$;
 - ▷ réaliser une régression linéaire sur cet ensemble (X_j, Y_j) puis ajouter dans les listes la pente et l'ordonnée à l'origine de cette régression.
- ▷ calculer pour les écarts-types des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les incertitudes-types ;
- ▷ tracer sur un graphique la droite obtenue avec la pente moyenne et l'ordonnée à l'origine moyenne ;
- ▷ superposer sur le même graphique les points de mesures en indiquant leurs incertitudes-type sous la forme de barre d'erreur.

1. <https://bit.ly/3A6iRS>

► Exemple

Lorsqu'un métal est éclairé par un rayonnement ultraviolet ou proche ultraviolet, des électrons sont extraits du métal : c'est l'effet photoélectrique. On considère une plaque de baryum éclairée par une lampe spectrale au mercure. Un système de filtres permet de sélectionner une longueur d'onde particulière λ émise par la lampe. Un dispositif expérimental indépendant permet de mesurer l'énergie cinétique \mathcal{E}_c des électrons extraits de la plaque de baryum.

On récapitule ci-dessous les valeurs mesurées. L'incertitude-type de l'énergie cinétique est de 0.05 eV.

\mathcal{E}_c (eV)	2.40	1.69	0.91	0.57	0.35
ν ($\times 10^{14}$ Hz)	11.825	10.111	8.210	7.4129	6.8838
$u(\nu)$ ($\times 10^{12}$ Hz)	2.3	1.7	1.1	0.91	0.79

L'énergie cinétique des électrons extraits d'un métal éclairé par une onde électromagnétique de fréquence ν s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = h(\nu - \nu_s) \quad (5.1)$$

où ν_s est une constante appelée fréquence seuil.

Le code python de la régression linéaire est disponible dans [un Google Colab en cliquant ici](#)².

Par régression linéaire, on obtient $h = (6.63 \pm 0.20) \times 10^{-34}$ J · s et $\nu_s = (6.03 \pm 0.10) \times 10^{14}$ Hz.

Il est à noter que la fréquence de seuil doit être calculée en cours de simulation Monte-Carlo, et non pas à l'aide des valeurs finales de pente et d'ordonnée à l'origine moyenne. En effet, ce calcul en cours de simulation permet la prise en compte des corrélations entre la pente et l'ordonnée à l'origine. Dans cette expérience, on constate un facteur 3 entre les deux possibilités.

2. <https://bit.ly/3A4ieqh>