

Sujet MPI* - Le devoir dure 4h.

La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

Problème I - La chasse au péritio

Il s'agit d'un extrait de l'épreuve CCS MP 2023 (43 questions sur 52).

En astronomie, les sursauts radio rapides (*fast radio burst*) sont de brèves émissions radio intenses, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (*perytions*), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

Après s'être intéressé à la structure d'un miroir de radiotélescope, on détaillera les péritios, pour en arriver à leur origine, finalement identifiée en 2015.

I.A – Un miroir pour les ondes électromagnétiques

I.A.1)

Q 1. Énoncer les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans une région vide de charges et de courants ?

On se placera dans cette situation dans toute la sous-partie I.A.

Q 2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique (équation de d'Alembert).

On considère une onde électromagnétique dans le demi-espace $x < 0$, dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation. Établir la relation, dite relation de dispersion, entre k et ω .

Cette onde rencontre une plaque métallique plane, constituée d'un conducteur parfait, dont la surface est située en $x = 0$ (figure 1).

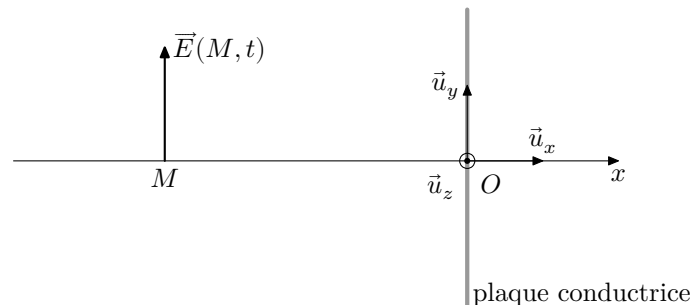


Figure 1 Onde électromagnétique rencontrant un conducteur parfait

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique entre un milieu 1 et un milieu 2,

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.3})$$

où M est un point de l'interface, $\vec{E}_i(M, t)$ et $\vec{B}_i(M, t)$ les limites des champs dans le milieu i en un point $M_i \rightarrow M$, $\sigma(M, t)$ la densité surfacique de charge en M , $\vec{j}_s(M, t)$ la densité de courant surfacique à l'interface et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à l'interface en M , dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

Q 4. Rappeler la définition d'un conducteur parfait. Que peut-on alors dire du champ $\vec{E}(M, t)$ dans un tel milieu ?

Q 5. Le champ électrique de l'onde décrite par l'équation (I.1) vérifie-t-il la relation de passage (I.2) ? Dans le demi-espace $x < 0$, règne aussi une onde de la forme $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega' t + k' x)$. En utilisant les relations de passage, déterminer \vec{E}_{0r} , ω' et k' . Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation.

Q 6. Dans le milieu $x < 0$, établir l'expression des champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ résultants. Comment qualifier l'onde correspondante ?

I.A.2)

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite figure 2, où E est un émetteur d'ondes centimétriques, P une plaque métallique, A une antenne reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle \vec{E}^2 \rangle$ du champ électromagnétique au niveau de l'antenne A.

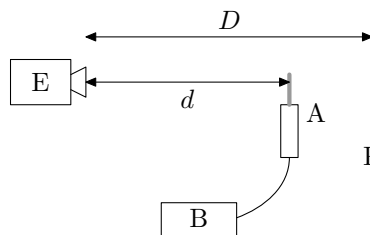


Figure 2 Dispositif expérimental à ondes centimétriques

On place la plaque P à une distance D d'environ 46 cm de l'émetteur et on relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la distance d entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en figure 3.

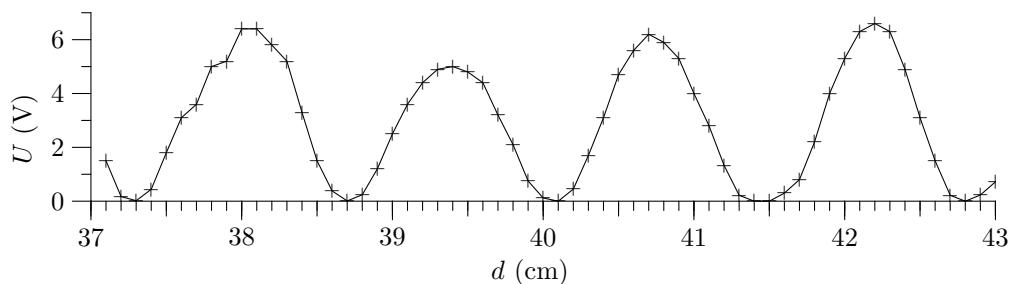


Figure 3 Tension U en fonction de la distance d entre l'antenne et l'émetteur

Q 7. Dédurre de l'enregistrement de la figure 3 la fréquence f des ondes utilisées.

Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1$ GHz, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6$ GHz.

Q 8. Estimer l'incertitude-type sur la fréquence déterminée expérimentalement et discuter de l'acceptabilité de la mesure par rapport aux données constructeur par un calcul d'écart normalisé.

I.A.3)

La figure 4 présente une deuxième expérience. E et R sont respectivement un émetteur et un récepteur d'ondes centimétriques, P_1 et P_2 sont deux plaques métalliques et S est une plaque de bois aggloméré. Le récepteur R fonctionne comme l'antenne et le boîtier électronique utilisés lors de l'expérience précédente.

Les deux plaques P_1 et P_2 étant perpendiculaires entre elles, on déplace la plaque P_2 selon l'axe Ox et on mesure la tension U délivrée par le récepteur, la position x de la plaque étant relevée par rapport à une origine arbitraire.

Q 9. Expliquer le rôle des éléments P_1 , P_2 et S. À quel autre montage rencontré en travaux pratiques ce montage est-il analogue ?

Q 10. Établir l'expression de la tension $U(x)$ en introduisant les grandeurs utiles. Dédurre des mesures une estimation de la fréquence des ondes.

Q 11. Estimer le contraste associé à la courbe expérimentale et proposer une explication à sa valeur.

I.A.4)

On rappelle que le champ magnétique est nul dans un conducteur parfait.

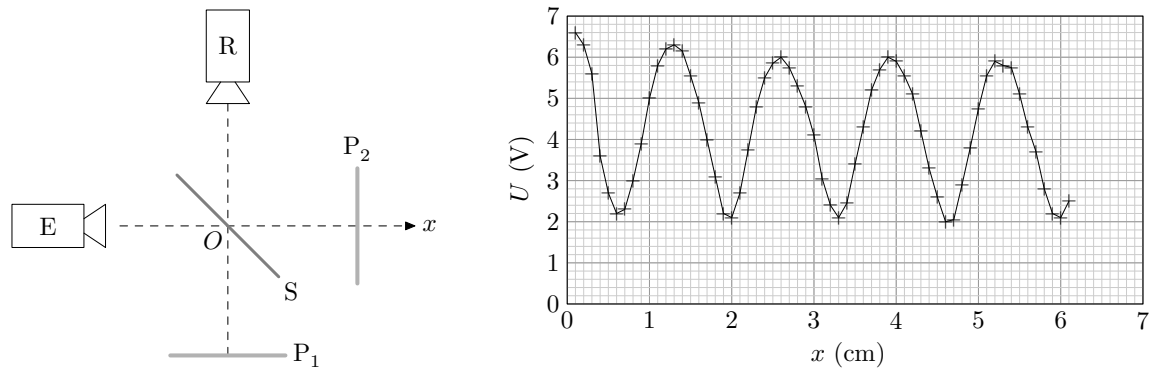


Figure 4 Expérience en ondes centimétriques

Q 12. Déterminer la densité de courant surfacique $\vec{j}_s(M, t)$ sur le conducteur dans le cas représenté figure 1. Quelle est la source physique du champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$?

On utilise un émetteur d'ondes centimétriques, générant un champ $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$. On remplace le plan métallique de la figure 1 par une grille métallique, constituée de barreaux parallèles séparés d'une distance très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique émise par le générateur. On admet que, dans ce cas, la grille se comporte comme un plan conducteur dans lequel les seuls courants électriques qui peuvent s'établir ont même direction que les barreaux.

On considère trois situations différentes par l'orientation de la grille par rapport au champ \vec{E} (figure 5).

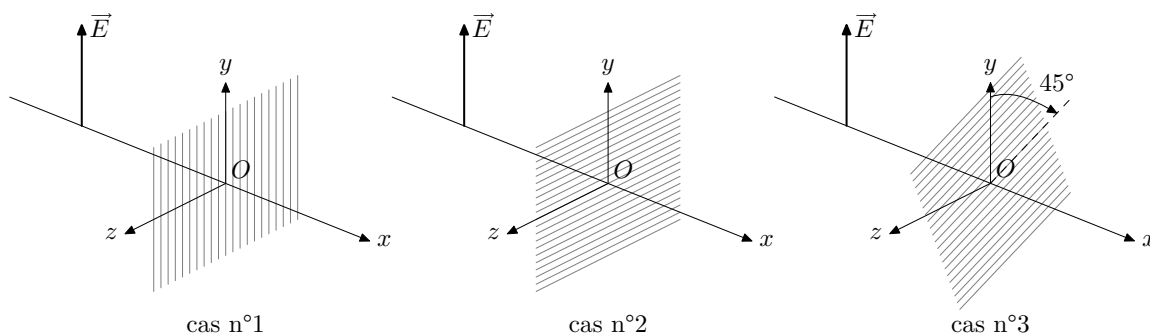


Figure 5 Onde électromagnétique incidente sur une grille métallique

Q 13. Dans chacun de ces trois cas, décrire le plus précisément possible le champ électrique observé en $x > 0$.

Q 14. À quel dispositif rencontré en travaux pratiques cette grille fait-elle penser ?

I.A.5)

Pour étudier les ondes électromagnétiques d'origine spatiale, on utilise un radiotélescope, basé sur le même principe qu'un télescope optique : un miroir parabolique réfléchit les ondes vers des capteurs situés à son foyer.

Q 15. Proposer une réalisation pratique du miroir d'un radiotélescope de très grande dimension (de l'ordre de la centaine de mètres) fonctionnant dans le domaine des ondes centimétriques.

I.B – L'énigme des péritios

L'observatoire de Parkes, en Australie, dispose d'un radiotélescope de 64 m de diamètre, utilisé entre autres pour l'étude des pulsars. En 2007, il a permis de découvrir des sursauts radio rapides, observés dès 2001, dont on a établi l'origine extragalactique. Ils seraient émis par des étoiles à neutrons particulières.

En analysant d'anciens enregistrements, on a trouvé qu'en 1998 le télescope de Parkes a détecté des signaux similaires aux sursauts rapides, appelés « péritios ». Leur origine fut une énigme, résolue seulement en 2015.

Les péritios sont des signaux radio d'une durée de quelques centaines de millisecondes, présentant une variation de fréquence similaire à la dispersion des impulsions émises par les pulsars s'étant propagées à travers un plasma froid dilué. La figure 6 représente la structure temporelle et fréquentielle d'un péritio qui est donc un signal quasiment sinusoïdal dont la fréquence varie lentement avec le temps.

I.B.1)

Afin de caractériser la variation temporelle de fréquence caractéristique lors de la réception d'une impulsion radio, détaillons la modélisation d'un plasma froid dilué. Il est constitué :

- de cations de masse M , de charge $+e$ à la densité volumique n_c ;
- d'électrons de masse m , de charge $-e$ à la densité volumique n_e .

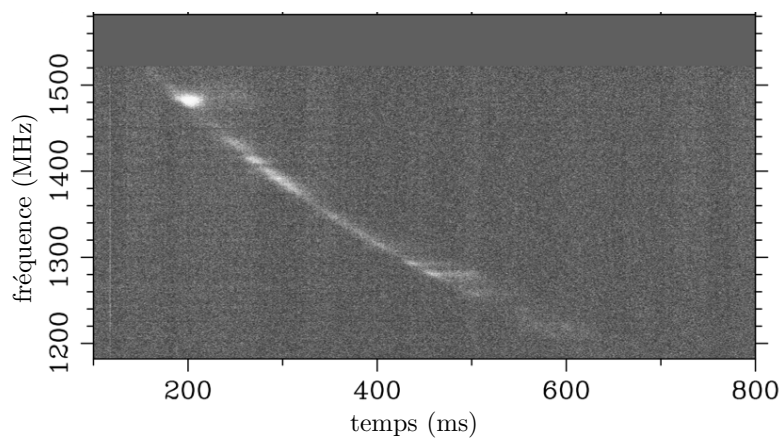


Figure 6 Structure temporelle et fréquentielle d'un péritio

On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les interactions entre les particules (plasma peu dense), elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;
- comme $M \gg m$, les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles ; c'est le modèle du « plasma froid » où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme « froids » ;
- en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique n ;
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique *transverse*

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k}x))$$

avec $\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x = 0$ pour une onde transverse se propageant selon $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

Q 16. Montrer que le plasma reste localement neutre en présence de l'onde. Que peut-on alors dire de la densité volumique n_e d'électrons dans le plasma ?

Q 17. En considérant que les électrons ne sont soumis qu'à la seule force électrique (on néglige l'effet du champ magnétique), montrer que la densité volumique de courant dans le plasma est reliée au champ électrique par une relation de la forme

$$\vec{j} = \theta_B \vec{E}$$

et exprimer la conductivité complexe θ_B en fonction des données.

Q 18. À partir des équations de Maxwell, établir la relation de dispersion sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où l'on exprimera la pulsation plasma ω_p en fonction de n , m , e et ε_0 .

Q 19. À quelle condition sur ω l'onde peut-elle se propager dans le plasma ?

Q 20. Établir alors l'expression de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω , ω_p et c .

I.B.2)

On considère une onde électromagnétique émise par un astre à une distance L de la Terre. Le temps de parcours de la composante de l'onde à la pulsation ω est

$$t(\omega) = \int_0^L \frac{d\ell}{v_g(\omega)}$$

Q 21. Pourquoi ne peut-on pas écrire a priori $t(\omega) = \frac{L}{v_g}$?

Q 22. Établir l'expression de $t(\infty)$. Quelle est son interprétation physique ?

Q 23. Quel est le signe de $\tau(\omega) = t(\omega) - t(\infty)$ et quel sens concret donner à cette grandeur ?

On définit la mesure de dispersion DM (pour *dispersion measure*) par

$$DM = \int_0^L n_e d\ell.$$

Pour un plasma interstellaire, on a typiquement $n_e \approx 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$.

Q 24. Montrer que pour des ondes d'une fréquence f de l'ordre du gigahertz, on peut écrire

$$\tau(f) = A \frac{\text{DM}}{f^2}$$

où l'on exprimera A en fonction de e , ε_0 , m et c .

Q 25. Calculer la valeur de A .

Q 26. Cette relation est-elle qualitativement en accord avec l'enregistrement de la figure 6 ?

Dans la définition $\text{DM} = \int_0^L n_e d\ell$, on exprime usuellement la densité électronique n_e en cm^{-3} et la distance L en parsec, unité de distance astronomique ; la mesure de dispersion est alors donnée en $\text{pc}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Q 27. À partir de la figure 6, estimer la mesure de dispersion DM, en exprimant le résultat d'abord en unités du système international puis en $\text{pc}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Q 28. Les mesures de dispersion mesurées pour des objets extragalactiques sont usuellement de quelques centaines de $\text{pc}\cdot\text{cm}^{-3}$. Peut-on exclure une origine extragalactique aux péricétes ?

Différents indices ont fait pencher la balance vers une origine terrestre des péricétes : détections dans des directions en dessous de la ligne d'horizon, ou sur un large champ de visée. Et surtout, ces phénomènes se produisent pendant les heures de bureau, en semaine.

En 2014, l'observatoire de Parkes s'est doté d'un enregistreur plus performant, pouvant couvrir une bande de fréquence allant de 402 MHz à 3 GHz, l'équipement utilisé jusqu'alors ne permettant d'explorer qu'une bande de 400 MHz de large, centrée sur 1382 MHz.

Des chercheurs ont alors découvert que plusieurs péricétes sont associés à une émission d'onde électromagnétique dans le domaine de fréquence de 2,3 à 2,5 GHz, inaccessible avec l'ancien matériel. Il est apparu que les péricétes sont toujours accompagnés d'une émission à 2,4 GHz, mais que l'on observe de nombreuses émissions à 2,4 GHz non accompagnées de péricéte. L'analyse des enregistrements sur deux mois montre que les péricétes sont répartis pendant la journée, entre 9h et 17h. Ces observations ont permis aux chercheurs de trouver le coupable : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire. La sous-partie I.C étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péricétes observés.

I.C – Le four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2,45\text{GHz}$, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$.

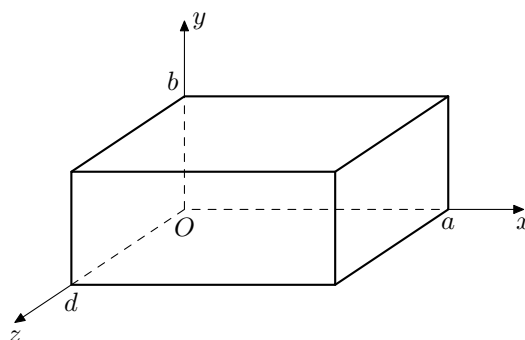


Figure 7 Cavité d'un four à micro-ondes

I.C.1)

On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide.

On cherche le champ électrique sous la forme

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Q 29. Montrer que seules des valeurs discrètes de k_x , k_y et k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m , n et ℓ .

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre.

Q 30. En déduire l'expression des fréquences f_{mnl} des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures $a = 36,0$ cm, $b = 24,0$ cm et $d = 26,5$ cm, alimenté par un klystron de fréquence $f = 2,45$ GHz. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ($\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La figure 8 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

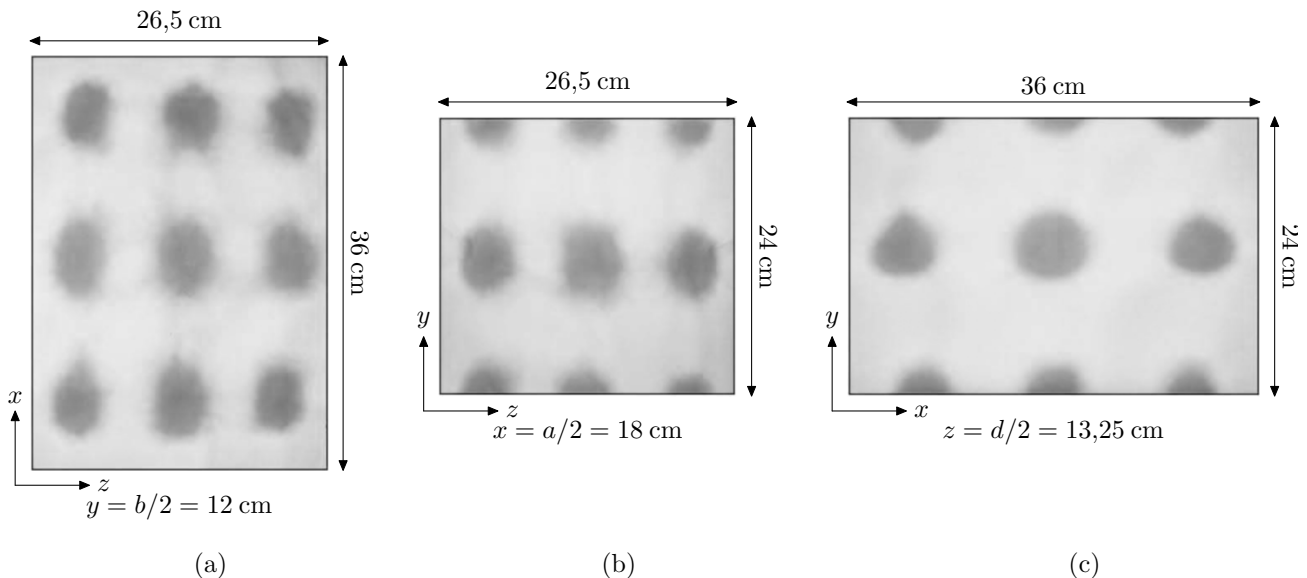


Figure 8 Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four — les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

Q 31. Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ) .

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ?

Justifier précisément l'aspect de la figure 8b en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

L'ouverture de la porte d'un four à micro-ondes déclenche l'arrêt du klystron générant l'onde. Cependant, des ondes électromagnétiques ont été détectées lorsque l'on ouvre la porte d'un four en cours de fonctionnement. Nous allons déterminer au bout de quelle durée l'onde présente dans le four s'atténue.

I.C.2)

On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface S , situées en $x = 0$ et $x = a$. Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

où n est un entier positif.

On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.

Q 32. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dans la cavité. On notera B_0 son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de E_0 .

Q 33. Établir l'expression W de l'énergie électromagnétique totale contenue dans la cavité, en fonction de B_0 , des caractéristiques de la cavité et de μ_0 . Que constate-t-on ?

I.C.3)

Pour rendre compte de la décroissance du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie σ des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique $\sigma = 1,5 \times 10^6$ S·m⁻¹.

Nous allons étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un conducteur métallique.

On considère un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité σ , occupant le demi-espace $x > 0$.

Q 34. Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si $\varepsilon_0 f \ll \sigma$? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

Q 35. Établir alors l'équation vérifiée par $\vec{B}(M, t)$ dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine $x > 0$ sous la forme

$$\vec{B}(x, t) = \underline{f}(x) \exp(i\omega t) \vec{u}_z.$$

Q 36. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{f}(x)$, sachant que l'on impose en $x = 0$ le champ $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$. On posera une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de μ_0 , σ et ω .

Q 37. Commenter l'expression du champ $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur. Donner l'interprétation de δ .

Q 38. Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.

Q 39. Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section S , en fonction de B_0 , ω , δ , S et μ_0 .

On définit le facteur de qualité de la cavité par

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}.$$

Q 40. En admettant que l'on puisse prendre en première approximation l'expression de l'énergie totale établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de a et δ .

Q 41. Calculer la valeur de Q pour un four à micro-ondes, avec $a = 36$ cm.

Q 42. Montrer que l'énergie totale $W(t)$ décroît avec un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de ω et Q .

Q 43. Calculer numériquement τ . Peut-on expliquer les pertes par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

Données

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$
Constante des gaz parfait	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Formulaire

Soit \vec{A} un champ vectoriel s'exprimant en coordonnées cartésiennes par $\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{u}_x + A_y(x, y, z) \vec{u}_y + A_z(x, y, z) \vec{u}_z$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

Problème II - Réception d'une communication téléphonique

Il s'agit d'un extrait de l'épreuve CCS MPI 2023 (14 questions sur 55).

Dans cette partie, on réalise une étude rapide d'une antenne émettrice en téléphonie mobile et des problèmes liés à la réception du signal. Pour cela, on étudie l'émission d'une onde électromagnétique par un dipôle électrique oscillant.

III.A – Rayonnement par une antenne

On considère un doublet constitué de deux charges ponctuelles de charges opposées $+q$ et $-q$. La charge $-q$ est fixe et placée en O ; la charge $+q$ est mobile sur l'axe des z suivant la loi $z(t) = a \sin(\omega t)$ où a représente l'amplitude et ω la pulsation des oscillations. L'ensemble constitue un dipôle variable qui crée une onde électromagnétique de pulsation ω en un point M repéré par les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (figure 9).

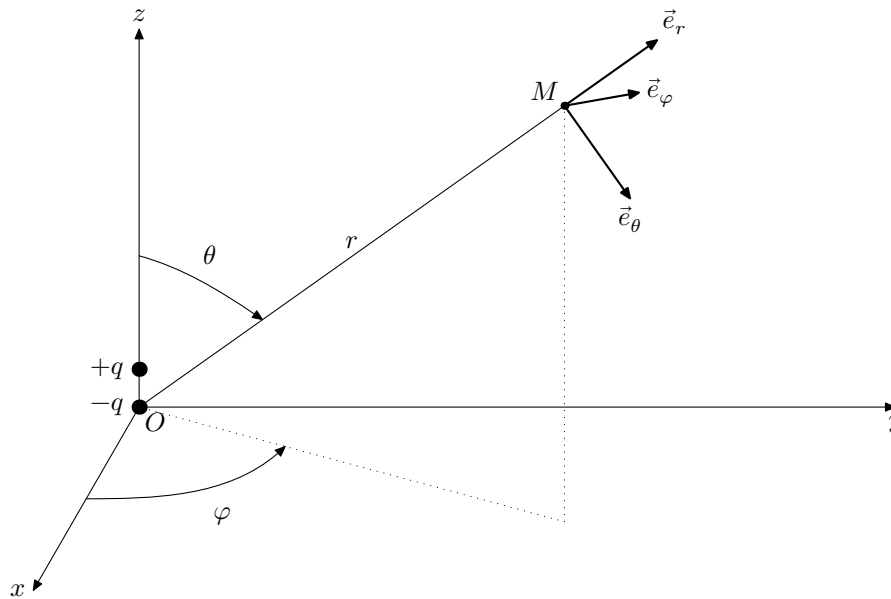


Figure 9 Repérage du dipôle et du point M d'étude

On se place dans les conditions où $r \gg a$ et $\lambda \gg a$ où λ est la longueur d'onde associée à l'onde électromagnétique émise.

Q 42. Citer les approximations associées aux deux inégalités $r \gg a$ et $\lambda \gg a$.

Q 43. Exprimer le moment dipolaire $\vec{p} = p(t)\vec{e}_z$ associé au doublet $(-q, +q)$.

On admet que le dipôle est équivalent, pour l'étude du champ dans la zone de rayonnement, à un élément de hauteur $2a$ parcouru par un courant d'intensité

$$I(t) = \frac{1}{2a} \frac{dp}{dt}.$$

Q 44. Déterminer I_0 , l'amplitude du courant $I(t)$.

La puissance instantanée rayonnée par un dipôle à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$ est proportionnelle au carré de l'accélération de ce dernier telle que

$$\Pi(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2.$$

Q 45. Déterminer P_r , la puissance moyenne totale rayonnée par ce dipôle à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$, appelée *zone de rayonnement*.

On définit R_r , la résistance du rayonnement par

$$P_r = R_r \frac{I_0^2}{2}.$$

Q 46. Déterminer l'expression de R_r en fonction de μ_0 , c , λ et a .

Q 47. Quel est l'intérêt de définir ce type de grandeur ?

Un opérateur de téléphonie mobile a converti plus de 5000 antennes en 800 MHz, auparavant utilisées pour la 4G, afin de créer son réseau 5G national. Ce réseau est accompagné d'antennes en 3500 MHz créées pour véhiculer de la 5G. On se propose de comparer la résistance de rayonnement pour les deux types de réseau 4G et 5G. Pour la 4G le mobile est muni d'une antenne de hauteur $h_{4G} = 2a = 4$ cm et pour la 5G le mobile à une antenne de longueur $h_{5G} = 2a = 1$ cm.

Q 48. Comparer les hauteurs d'antenne et les longueurs d'onde dans les deux cas. Conclure. Estimer la distance à partir de laquelle on se situe dans la zone de rayonnement.

Q 49. Déterminer la résistance de rayonnement R_r pour les deux types de réseau.

III.B – Problème de réception du signal

« Je n'ai plus de réseau ! » Voilà une phrase que tous les utilisateurs de mobiles ont prononcée un jour ! On cherche ici à illustrer quelques difficultés liées à la réception d'un signal en téléphonie mobile.

Pour simplifier l'étude, l'onde émise par la station de base sera considérée comme plane et polarisée rectilignement suivant l'axe des x . Son champ électrique s'écrit, en notation complexe, $\vec{E}_i(z, t) = E_{0,i} \exp(i(\omega t - kz))\vec{e}_x$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} > 0$ et $\omega = 2\pi f$ pulsation de l'onde du champ électrique. On suppose que l'amplitude $E_{0,i}$ est une grandeur réelle. La fréquence est égale à 3500 MHz.

On suppose qu'un obstacle (par exemple un immeuble) situé en $z = L$ réfléchit l'onde sans l'atténuer et sans modifier sa polarisation (Figure 10).

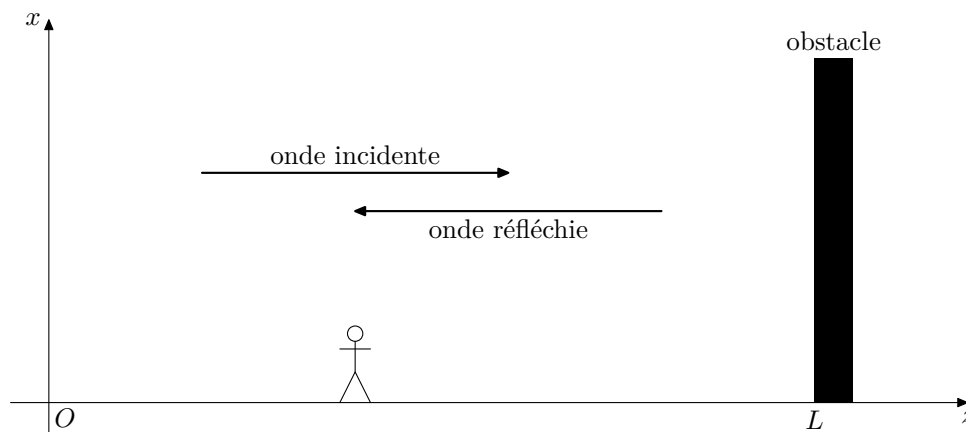


Figure 10 Obstacle sur le trajet d'une onde de téléphonie mobile

Q 50. En utilisant les relations de passage en $z = L$ pour le champ électrique et en modélisant l'obstacle par un métal conducteur parfait, déterminer l'expression complexe du champ électrique de l'onde réfléchie \vec{E}_r , supposée de même fréquence et de même direction que l'onde incidente.

Q 51. En déduire l'expression du champ électrique résultant \vec{E}_{tot} . Comment qualifie-t-on ce type d'onde ? On admet que la puissance P reçue par l'utilisateur (via son téléphone mobile en réseau 5G) est proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique. L'établissement de la communication est impossible (plus de réseau !) si la puissance reçue est inférieure à une puissance seuil notée P_{seuil} qui correspond au dixième de la valeur moyenne spatiale (c'est-à-dire suivant z) de la puissance reçue P .

Q 52. Déterminer la durée moyenne des coupures lorsque le téléphone mobile est porté par un piéton qui se déplace à la vitesse de $3 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ suivant l'axe des z croissants, puis lorsque le téléphone est porté par un passager d'une automobile se déplaçant à $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans le sens des z croissants. Commenter les résultats obtenus.

En milieu urbain, notamment à cause des divers obstacles, les retards des trajets réfléchis des ondes par rapport aux trajets directs sont de l'ordre de $\Delta t = 0,5 \mu\text{s}$.

Q 53. Quelle est la valeur typique de $L - z$ associée à ce retard ?

On suppose que pour cette valeur typique de $L - z$ et pour la fréquence f , le signal reçu par le mobile de la part de la station de base a une puissance nulle. On fait alors varier la fréquence f de $\pm\Delta f$.

Q 54. Déterminer numériquement la valeur minimale à donner à Δf pour obtenir une puissance supérieure à P_{seuil} .

Q 55. En vous appuyant sur les questions précédentes, proposer au moins une méthode permettant de lutter contre les coupures réseau.

Données

Données générales

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Données sur l'aluminium métallique

Conductivité en régime permanent	$\gamma_0 = 38 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_r = 1$
Perméabilité magnétique relative	$\mu_r = 1$

Formulaire

Les grandeurs complexes sont soulignées d'un trait et on note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Le symbole \times désigne l'opération produit vectoriel. L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Analyse vectorielle

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\overline{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z$$

Relation de continuité des champs électromagnétiques

En présence de charges surfaciques σ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante tangentielle est toujours continue

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}$$

En présence de courants surfaciques \vec{j}_s , la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante normale est toujours continue

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}$$

• • • FIN • • •