

## Table des matières

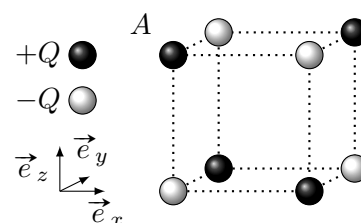
1	Champs et potentiels de charges ponctuelles	1
2	Théorème de Gauss	2
3	Sources du champ électromagnétique	4
4	Champs gravitationnels	4
5	Loi de Poisson	5
6	Théorème d'Ampère	5
7	Dipôles magnétostatiques	7
8	Pour aller plus loin...	8
9	Sujets d'oraux	11

## 1 Champs et potentiels de charges ponctuelles

### Exercice 1 - Calcul d'une force électrostatique :

Des charges sont disposées sur les huit sommets d'un cube de côté  $a$ , de manière à ce que deux charges occupant des sommets voisins soient de signe opposé (voir schéma).

Calculer la force s'exerçant sur la charge notée A et commenter.



**Exercice 2 - Cartes de champ et de potentiel :** Tracer qualitativement les lignes de champ et les équipotentielles des deux distributions de charge suivantes :

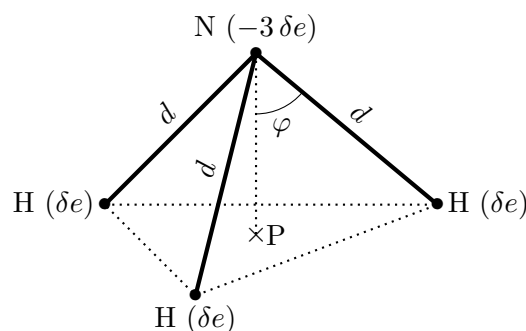
1. Deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$ , séparées d'une distance  $a$ . Commenter en particulier les allures près et loin des deux charges.
2. Deux charges  $q$  séparées d'une distance  $a$ . Commenter de même l'allure à faible et grande distance de la distribution.

### Exercice 3 - Moment dipolaire de l'ammoniac :

La molécule d'ammoniac  $\text{NH}_3$  forme une pyramide à base triangulaire et possède donc un moment dipolaire de norme  $\mu = 1.47 \text{ D}$ . On donne  $\varphi = 68^\circ$  et  $d = 101 \text{ pm}$ . P est le projeté orthogonal de N sur le plan formé par les trois hydrogènes.

Déterminer le pourcentage de ionicité de la liaison N-H.

Donnée :  $1 \text{ D} = 3.33 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ .



**Exercice 4 - Potentiel créé par une chaîne infinie :** On considère une chaîne infinie d'ions, espacés régulièrement d'une distance  $a$ . Les sites pairs sont occupés par des ions de charge  $q$  et les sites impairs par des ions de charge  $-q$ . On se propose de calculer l'énergie d'interaction de la chaîne.

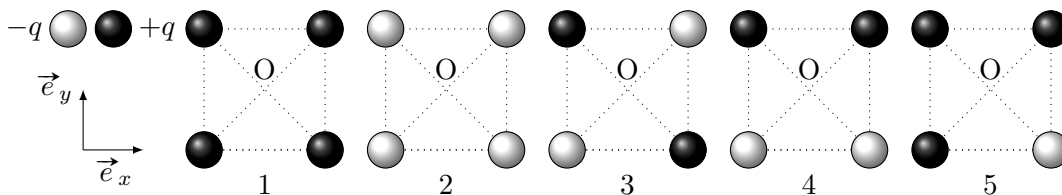
On donne  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ .

1. Peut-on prévoir la forme du résultat ?
2. On s'intéresse d'abord à une charge  $q$  placée en  $x = 0$ . Quel est le potentiel créé par cette charge dans tout l'espace ?
3. On place une charge  $-q$  en  $x = a$ . Quelle est son énergie potentielle dans le champ créé par la première charge ? Même question pour une troisième charge  $q$  placée en  $x = 2a$ .
4. En déduire l'énergie potentielle  $W$  d'un ion dans la chaîne infinie.

**Exercice 5 - Système  $-q, kq$ ; équipotentielle  $V = 0$  :** Une charge ponctuelle  $q_1 > 0$  est placée dans le vide sur un axe  $x'Ox$  au point  $O$  et une charge ponctuelle  $q_2 < 0$  est placée sur ce même axe au point  $P$  d'abscisse  $D > 0$ . On pose  $q_2 = -q$  et  $q_1 = +kq$  avec  $k > 1$ , et  $q > 0$ .

1. Donner l'expression de  $V(M)$ , potentiel en un point quelconque de l'espace situé à  $r_1$  de  $O$  et  $r_2$  de  $P$ .
2. Préciser la relation existante entre  $r_1$  et  $r_2$  sur la surface équipotentielle  $V = 0$ .
3. Cette relation définit une sphère de rayon  $R$  centrée au point  $C$  de l'axe  $Ox$  d'abscisse  $D + d$  avec  $d \geq 0$ .  
En utilisant les coordonnées cartésiennes, déterminer  $R$  et  $d$  en fonction de  $D$  et  $k$ .

**Exercice 6 - Étude de distributions de charge ponctuelles :** On considère les configurations de charges suivantes. La diagonale du carré vaut  $2a$  et on supposera que le potentiel à l'infini est nul.



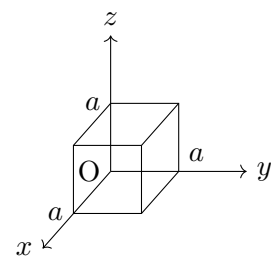
1. Calculer le champ et le potentiel au centre du carré pour chaque configuration.
2. Quelle est l'énergie électrostatique totale contenue dans la distribution de charge ? En déduire la configuration la plus stable.
3. On reprend la configuration numéro 3 ci-dessus. Calculer le potentiel en un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  proche de l'origine  $O$ . Commenter.

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p>1 - <math>\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right] \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)</math>.</p> <p>3 - <math>\delta = 27\%</math>.</p> <p>4 - 4. <math>W = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln(2)</math>.</p>	<p>5 - 2. <math>r_1 = kr_2</math>; 3. <math>D + d = \frac{k^2 D}{k^2 - 1}</math>, <math>R = \frac{kD}{k^2 - 1}</math>.</p> <p>6 - 1. Potentiel : <math>\frac{q}{\pi\epsilon_0 a}</math>; <math>-\frac{q}{\pi\epsilon_0 a}</math>; 0; 0; <math>\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}</math>; Champ : <math>\vec{0}</math>; <math>\vec{0}</math>; <math>\vec{0}</math>;</p>	<p><math>-\frac{q\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_y</math>; <math>\frac{q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\vec{e}_x - \vec{e}_y)</math>; 2. Énergie : <math>\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} (1 + 2\sqrt{2})</math>; idem; <math>\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} (1 - 2\sqrt{2})</math> (la plus stable); <math>-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}</math>; 0; 3. <math>V(M) \simeq -\frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^3} xy</math>.</p>
---	--	--

## 2 Théorème de Gauss

**Exercice 7 - Calculs de flux :** Dans la région de l'espace considérée règne un champ électrostatique  $\vec{E}(M) = Cx\vec{e}_x$ . Soit un cube de côté  $a$  représenté sur la figure ci-contre.

1. Calculer le flux sortant du cube du champ électrostatique en appliquant la définition du flux.
2. Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski.
3. En déduire la charge totale dans le cube.
4. Même question pour  $\vec{E}(M) = Dx^2\vec{e}_x$ .
5. Même question pour  $\vec{E}(M) = F(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ .



**Exercice 8 - Symétries et invariances :** Pour chacune des distributions de charges ci-dessus, indiquer s'il existe des plans de symétries et des invariances et en déduire la forme du champ  $\vec{E}$ . Si celles-ci sont suffisantes, proposer une surface de Gauss adaptée.

1. Un système composé de deux cylindres identiques de direction  $\vec{e}_z$  infinis de densité volumique de charge  $+\rho$  dont les centres sont placés en  $x = -a$  et  $x = +a$ .
2. Un tore (c'est-à-dire « un donut ») uniformément chargé en volume.
3. Une distribution de charge uniforme pour l'espace  $x > 0$  et vide pour  $x < 0$ .

**Exercice 9 - Calculs de champs et de potentiels électriques :** Calculer le champ électrique produit dans tout l'espace par les distributions suivantes :

1. Une couche infinie d'épaisseur  $e$ , chargée uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . À partir de l'expression du champ et en comparant avec le champ du plan infini, en déduire une expression de la densité surfacique de charge. Calculer le potentiel électrostatique correspondant.
2. Une coquille sphérique d'épaisseur  $d$  uniformément chargée  $\rho$  en volume, située à la distance moyenne  $R$  d'un point  $O$ . On proposera deux méthodes différentes. L'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ à symétrie sphérique est  $\text{div}(f(r)\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 f(r))$ .
3. Deux plaques infinies juxtaposées, d'épaisseurs  $d_1$  et  $d_2$ , définies par des distributions volumiques homogènes de charges  $\rho_1 > 0$  et  $\rho_2 < 0$  telles que  $\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2 = 0$ .

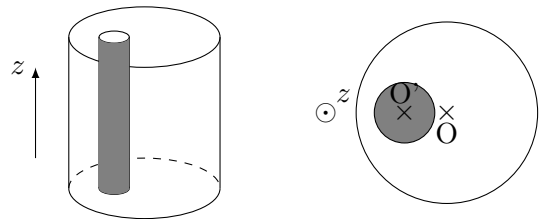
**Exercice 10 - Calculs de capacités :** Calculer la capacité entre deux armatures surfaciques, l'une de charge  $+Q$  constante et l'autre  $-Q$ , dans les deux cas ci-dessous :

1. La capacité d'un condensateur formé par deux cylindres coaxiaux minces de hauteur  $H$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_2 > R_1$ . On suppose que les rayons sont négligeables devant  $H$ , ce qui implique que l'on suppose les cylindres infinis.
2. Un condensateur formé par deux sphères concentriques minces, de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_2 > R_1$ .

**Exercice 11 - Champ dans une cavité cylindrique :**

Un cylindre infini d'axe  $O_1 z$  possédant une charge volumique uniforme  $\rho$ , présente une cavité cylindrique infinie (d'axe  $O_2 z$  avec  $O_2$  différente de  $O_1$ ) vide de charges.

Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité et donner sa valeur.



**Exercice 12 - Énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée :** Une sphère de rayon  $R$  porte la charge  $Q$  uniformément répartie en volume. On définit l'énergie de constitution (ou énergie coulombienne) de cette sphère comme le travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

1. Calculer le potentiel d'une boule uniformément chargée de rayon  $r$ .
2. La sphère a un rayon  $r < R$ . Calculer le travail qu'il faut fournir pour augmenter le rayon de cette sphère de  $dr$ , en amenant les charges de l'infini.
3. En déduire l'expression de l'énergie de constitution de la sphère en fonction de  $Q$  et  $R$ .
4. Par analogie, en déduire l'énergie gravitationnelle d'une sphère de rayon  $R$  et de masse  $M$ .

**Exercice 13 - Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss :** On considère une région vide de charge dans laquelle est établi un champ de la forme :  $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z$ .

1. Quelle symétrie présente ce champ électrique ?
2. Quelle équation est vérifiée par ce champ électrique ?
3. Montrer que si l'on connaît le champ électrique sur l'axe  $\vec{E}(r = 0, z)$ , alors on peut calculer le champ électrique radial en un point proche de l'axe, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques. On rappelle que la divergence en coordonnées cylindriques s'écrit :  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ .

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p><b>7</b> - 1. <math>Ca^3</math>; 3. <math>Q = \epsilon_0 Ca^3</math>; 4. <math>\Phi = Da^4</math> et <math>Q = \epsilon_0 Da^4</math>. 5. 0</p> <p><b>8</b> - 1. <math>\vec{E} = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y</math>; 2. <math>\vec{E} = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z</math>; 3. <math>\vec{E} = E(x)\vec{e}_x</math>, un cylindre.</p> <p><b>9</b> - 1. <math>\vec{E} = \pm \frac{\rho e}{2\epsilon_0}\vec{e}_z</math> pour <math> z  &gt; e/2</math>, <math>\frac{\rho z}{\epsilon_0}\vec{e}_z</math> pour <math> z  \leq e/2</math>, <math>V = \mp \frac{\rho e z}{2\epsilon_0}</math> pour <math> z  &gt; e/2</math>, <math>-\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}</math> pour <math> z  \leq</math></p>	<p><math>e/2</math>, <math>\sigma = \lim_{e \rightarrow 0} \rho e</math>; 2. <math>\vec{E} = \vec{0}</math> pour <math>r &lt; R - d/2</math>, <math>\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ r - \frac{(R - d/2)^3}{r^2} \right] \vec{e}_r</math> pour <math>R + d/2 &gt; r &gt; R - d/2</math>, <math>\frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} [(R + d/2)^3 - (R - d/2)^3] \vec{e}_r</math> pour <math>r &gt; R + d/2</math>; 3. <math>\vec{E} = \frac{\rho_1(2x + d_1) + \rho_2 d_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x</math> dans la plaque 1, <math>\frac{\rho_1 d_1 + \rho_2(2x - d_2)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x</math> dans la seconde, <math>\vec{0}</math> à l'extérieur.</p>	<p><b>10</b> - 1. <math>C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}</math>; 2. <math>C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)</math>.</p> <p><b>11</b> - <math>\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \overrightarrow{H_1 H_2}</math> où on a noté <math>H</math> les projetés orthogonaux du point <math>M</math> sur les axes de révolution des cylindres.</p> <p><b>12</b> - 3. <math>W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}</math>.</p> <p><b>13</b> - 3. <math>E_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(r = 0, z)</math>.</p>
--	---	---

### 3 Sources du champ électromagnétique

**Exercice 14 - Modèle de conduction électrique dans un matériau :** Pour modéliser la conduction électrique dans un matériau, on considère un conducteur cylindrique de section  $S$  et de longueur  $L$ , dont les deux extrémités sont soumises à une différence de potentiel  $U$ . Un champ électrique uniforme, de norme  $E$  et dirigé dans le sens de l'axe  $(Ox)$  orthogonal à la section  $S$ , règne dans le volume du conducteur. Celui-ci contient une densité volumique de  $\rho$  d'électrons libres, de masse  $m$  et de charge  $-e$ , assurant la conduction électrique. On modélise les chocs entre les atomes du réseau atomique et les électrons libres par une force de frottement fluide linéaire  $\vec{f} = -\alpha_f \vec{v}$ .

1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite  $\vec{v}_\infty$ .
2. On suppose que la vitesse initiale des électrons est nulle. Donner la loi horaire de la vitesse  $v(t)$  d'un électron et en donner la durée  $\tau$  caractéristique.
3. En réalisant un calcul de flux d'électrons, exprimer le nombre  $\delta n$  d'électrons traversant la section  $S$  du conducteur pendant une durée  $dt$ . On suppose que tous les électrons du conducteur ont atteint la vitesse limite  $\vec{v}_\infty$ . En déduire l'expression de la valeur absolue de l'intensité électrique dans ce conducteur.
4. Montrer qu'une relation de proportionnalité unit la tension  $U$  aux bornes du conducteur à l'intensité qui la traverse. Définir sa résistance et commenter l'influence des paramètres géométrique  $L$  et  $S$ .
5. Pour le cuivre, on mesure une densité volumique d'électrons libres  $\rho_{\text{cuivre}} = 8.49 \times 10^{28}$  électrons  $\cdot \text{m}^{-3}$ . De plus, on définit sa résistivité comme  $r = RS/L$  avec  $R$  la résistance du fil, qui vaut  $r_{\text{cuivre}} = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . En déduire la constante de temps  $\tau$ . Jusqu'à quelle fréquence est-il raisonnable de considérer que les électrons libres sont en permanence à la vitesse limite ?

Données :  $m_{\text{électron}} = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

**Exercice 15 - Foudre en boule :** On cherche à rendre compte de l'évolution d'un boule constitué d'un nombre  $N$  de particules portant une même charge  $q$  plongée dans l'air. Ces charges engendrent un champ électrique variable  $\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_r$ . Sous l'effet de ce champ, les charges qui se déplacent dans l'air acquièrent un vecteur vitesse  $\vec{v} = \mu \vec{E}$  où la constante  $\mu$  appelée mobilité des charges est du signe de  $q$ . On note  $\rho(t)$  la densité volumique de charges; on suppose qu'elle reste uniforme et on note  $\rho_0$  sa valeur initiale. On note  $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_r$  le vecteur densité de courant. On note  $R(t)$  le rayon de la boule et  $R_0$  sa valeur initiale.

1. Donner alors l'expression du champ  $\vec{E}$  à l'intérieur de la boule.
2. Exprimer  $\vec{j}$  en fonction de  $\mu$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\rho(t)$  et du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .
3. Montrer que  $\text{div } \overrightarrow{OM} = 3$  puis en déduire de l'équation de conservation de la charge que  $\rho(t)$  est solution équation différentielle du premier ordre à variables séparables et la résoudre.
4. En déduire l'expression de  $R(t)$ .
5. Retrouver le résultat en envisageant le mouvement d'une charge située à chaque instant au bord de la boule chargée.

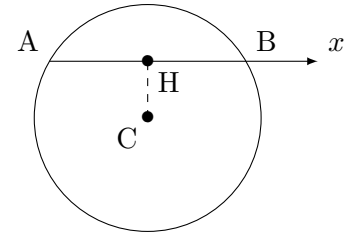
<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p><b>14</b> - 1. <math>\vec{v}_\infty = -\frac{eE}{\alpha_f} \vec{e}_x</math>; 2. <math>\vec{v}(t) =</math></p>	<p><math>\vec{v}_\infty (1 - \exp(-t/\tau))</math> avec <math>\tau = m/\alpha_f</math>; 3. <math> I  = e\rho S v_\infty</math>; 4. <math>U = V(0) - V(L) = EL</math> donc <math>I = \frac{e^2 \rho S}{L \alpha_f} U</math>; 5. <math>\tau = 2.48 \times 10^{-14} \text{ s}</math>.</p>	<p><b>15</b> - 2. <math>\vec{j} = \frac{\mu \rho(t)^2}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM}</math>; 3. <math>\rho(t) = \frac{\rho_0 \epsilon_0}{\mu \rho_0 t + \epsilon_0}</math>; 4. <math>R(t) = R_0 \left( \frac{\mu \rho_0}{\epsilon_0} t + 1 \right)^{1/3}</math>.</p>
--	--	---

### 4 Champs gravitationnels

**Exercice 16 - Tunnel terrestre :** On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe  $(Hx)$  ne passant pas par C et traversant la Terre. On note  $d$  la distance CH du tunnel au centre de la Terre. Un point matériel M

de masse  $m$  glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de A sans vitesse initiale. On prendra  $R_T = 6.4 \times 10^6$  m,  $d = CH = 5 \times 10^6$  m et  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- Déterminer l'expression du champ gravitationnel terrestre à la distance  $r$  du centre de la terre.
- En déduire l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$  de M.
- Quelle est la vitesse maximale atteinte par M au cours du mouvement.
- Déterminer le temps mis pour aller de A vers B.



**Exercice 17 - Discontinuité de Bullard :** On considère un modèle de Terre à symétrie sphérique de rayon  $R$  : on observe que le champ de gravitation  $g(r)$  varie à l'intérieur de la manière suivante :

- $\vec{g}(r) = -\alpha r \vec{e}_r$  pour  $0 < r < R/2$
- $\vec{g}(r) = -g_0 \vec{e}_r$  pour  $R/2 < r < R$ .

On note  $M$  la masse totale de la Terre, et  $G$  la constante de gravitation universelle. On pose également  $\mu_{<}(r)$  la masse volumique dans la zone  $r < R/2$  et  $\mu_{>}(r)$  celle dans la zone  $r > R/2$ .

- Utiliser le théorème de Gauss dans la zone  $r < R/2$  pour déterminer  $\mu_{<}$ . On appliquera ce théorème à deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$ .
- Faire de même pour trouver  $\mu_{>}$ .
- Déterminer  $\alpha$ .

Éléments de réponse :

$16 - 2. \mathcal{E}_p(x) = mg(x^2 + d^2)/(2R_T); 3. v_{\max} \approx 5000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; 4. T \approx 1 \text{ h } 23 \text{ min.}$	$17 - 1. \mu_{<} = \frac{3\alpha}{4\pi G}; 2. \mu_{>} = \frac{M}{2\pi R^2 r}; 3. \alpha = \frac{2GM}{R^3}.$
--	---

## 5 Loi de Poisson

**Exercice 18 - Diode à vide :** Une diode à vide est formée de deux électrodes planes parallèles, la cathode C et l'anode A, de surface  $S$  et séparées d'une distance  $d$ . La cathode est maintenue à un potentiel nul ( $V_C = 0$ ) mais elle est chauffée. Par effet thermoélectronique, elle libère des électrons ayant une vitesse faible (prise nulle pour la suite). Ces électrons sont dirigés vers l'anode qui est portée au potentiel  $V_A > 0$ . On admet que les lignes de courant ainsi créées sont perpendiculaires aux deux plaques. La zone située entre les électrodes contient donc des électrons qui ont été émis sans vitesse initiale par la cathode.

On néglige tout effet de bord et on ne s'intéresse qu'à l'espace inter-électrodes dans lequel on considère que la charge volumique  $\rho$ , le potentiel  $V$ , la vitesse  $v$  et l'intensité électrique  $I$  ne sont des fonctions que de  $x$ .

- Retrouver l'équation reliant le potentiel  $V$  et la densité de charge  $\rho$ .
- Par des arguments numériques, montrer que le poids des électrons peut être négligé devant la force électrostatique.
- Calculer la vitesse des électrons en  $x$  en fonction du potentiel  $V(x)$ .
- Déterminer l'expression de l'intensité  $I(x)$  traversant une surface d'aire  $S$  située à une distance  $x < d$  de la cathode et parallèle à celle-ci. Exprimer le résultat en fonction de  $\rho(x)$ ,  $S$  et  $v(x)$ .
- Montrer que l'intensité ne dépend pas de  $x$ .
- Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par  $V$ . On fera apparaître le paramètre  $a = \frac{I}{S\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$ .
- Intégrer cette équation pour déterminer  $V(x)$ . On supposera que le champ et le potentiel sont nuls en  $x = 0$ .
- En déduire la relation entre l'intensité  $I$  et le potentiel  $V_A$  de l'anode (loi de Child-Langmuir).

Éléments de réponse :

$18 - 3. v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}; 4. I =$	$\left  \begin{array}{l} -\rho(x)v(x)S; 6. \frac{d^2V}{dx^2} = aV^{-1/2}; 7. \left(\frac{3d}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} \left(\frac{I}{S\epsilon_0}\right)^{2/3}. \\ V(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{a}\right)^{4/3} x^{4/3}; 8. V_A = \end{array} \right.$
--	--

## 6 Théorème d'Ampère

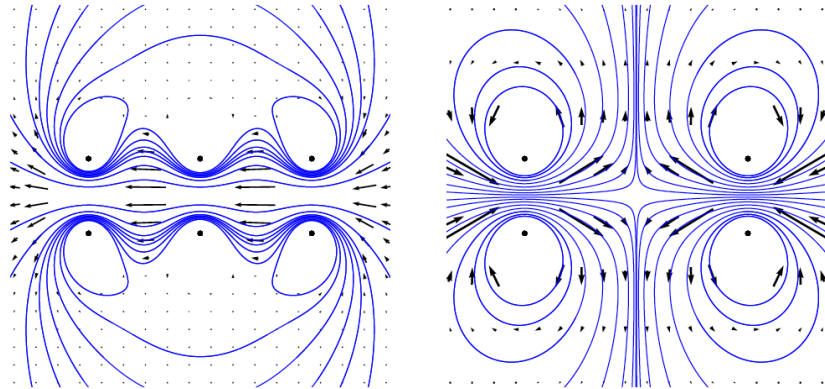
**Exercice 19 - Calculs de circulations de champs de vecteurs :**

1. Soit un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ .
  - (a) Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour rectangulaire orienté construit par le vecteur  $3\ell\vec{e}_x$  puis par le vecteur  $2\ell\vec{e}_y$ .
  - (b) Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour circulaire de centre O, de rayon  $R$  et orienté par  $\vec{e}_\theta$ .
2. Soit une force  $\vec{F}$  conservative dérivant de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ .
  - (a) Donner l'expression du travail de cette force entre deux points A et B quelconques.
  - (b) Justifier que la circulation d'une force conservative sur un contour fermé est toujours nulle.
  - (c) Justifier que la circulation du champ magnétique de la question précédente sera toujours nulle quel que soit le contour fermé choisi.
3. Soit la force  $\vec{F} = k_1 r \theta \vec{e}_\theta$ .
  - (a) Montrer que cette force n'est pas conservative.
  - (b) Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour circulaire de centre O, de rayon  $R$  et orienté par  $\vec{e}_\theta$ .
4. Soit la force  $\vec{F} = k_0(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x)$ .
  - (a) Montrer que cette force n'est pas conservative.
  - (b) Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour rectangulaire orienté construit par le vecteur  $3\ell\vec{e}_x$  puis par le vecteur  $2\ell\vec{e}_y$ .

**Exercice 20 - Cartes de champ :**

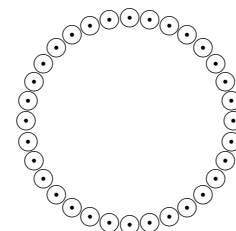
On considère les deux cartes de champs magnétiques ci-contre produites à l'aide de plusieurs spires. Pour chaque carte, préciser

1. Où sont placées les sources de courant.
2. Dans quel sens circule le courant pour chacune des sources.



**Exercice 21 - Invariances et symétries :** Pour chacune des distributions de courants ci-dessous, indiquer s'il existe des plans de symétries et des invariances et en déduire la forme du champ  $\vec{B}$ . Si celles-ci sont suffisantes, proposer un contour d'Ampère adapté.

1. Deux fils infinis parallèles et parcourus par un courant  $I$  identique.
2. Une bobine torique.
3. Une distribution de  $N$  fils parcourus par des courants  $I$  identiques disposés sur un cylindre.



**Exercice 22 - Deux calculs de champs classiques :**

1. Calculer le champ magnétique produit dans un cylindre infini de section  $S = \pi R^2$  parcouru par une densité de courant uniforme parallèle au cylindre  $\vec{j} = j\vec{u}_z$  en utilisant le théorème d'Ampère.
2. On considère une plaque épaisse infinie, de distribution de courant constituée d'une densité de courant uniforme  $\vec{j} = j\vec{u}_y$ , comprise entre les plans  $z = -e/2$  et  $z = +e/2$ . En utilisant une symétrie particulière, donner la valeur du champ sur le plan  $z = 0$  puis calculer le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.

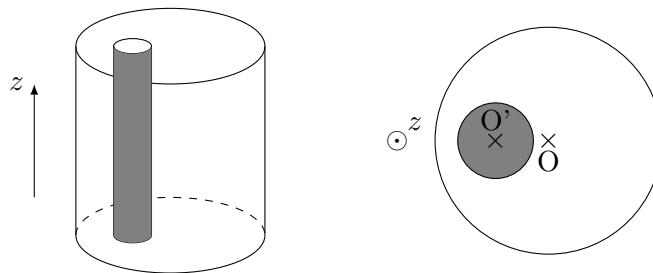
3. Retrouver en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère statique les deux résultats précédents. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

**Exercice 23 - Câble coaxial :** Un fil coaxial est constitué d'un conducteur plein de rayon  $r_1$  traversé par un courant  $I$ , d'une couche isolante entre  $r_1$  et  $r_2$ , et d'un conducteur entre  $r_2$  et  $r_3$  permettant le retour du courant. On suppose le câble infini.

- Déterminer la densité de courant en tout point du câble coaxial.
- Donner les symétries et invariances du champ magnétique.
- Calculer l'intensité du champ en fonction du rayon.

**Exercice 24 - Cavité dans un câble cylindrique :** On considère un câble cylindrique de rayon  $R$  parcouru par une densité de courant  $\vec{j}$  uniforme et parallèle à l'axe du cylindre. Le fil comporte une cavité cylindrique de rayon  $a < R$ , entièrement située dans le câble et excentrée par rapport à son axe.



- Calculer le champ magnétique dans tout l'espace par le câble sans cavité.
- À l'aide du théorème de superposition, calculer le champ magnétique dans la cavité du câble.

**Éléments de réponse :**

19 - 1. 0; 2.  $W_{A \rightarrow B} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}(B)$ ,  $C = W_{A \rightarrow A} = 0$ ; 3.  $C = 2\pi^2 k_1 R^2$ ; 4.  $C = 12k_0 \ell^2$ .

21 - 1.  $\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y$ ; 2.  $\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_\theta$ , contour circulaire; 3.  $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$ , contour circulaire.

22 - 1. Si  $r > R$ ,  $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 S j}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ , si

$r < R$ ,  $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 r j}{2} \vec{e}_\theta$ ; 2.  $\vec{B}(z) = \mu_0 \frac{j e}{2} \vec{u}_x$  si  $|z| > e/2$ ;  $\vec{B}(z) = \mu_0 j z \vec{u}_x$  si  $|z| < e/2$ .

23 - 1.  $\vec{j}(r < r_1) = \frac{I}{\pi r_1^2} \vec{e}_z$ ,  $\vec{j}(r_2 < r < r_3) = \frac{-I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \vec{e}_z$ ,  $\vec{j}(r_1 < r < r_2) = \vec{0}$ ; 2.  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$ ; 3.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{r_1^2} \vec{e}_\theta$

si  $r < r_1$ ,  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  si  $r_1 < r < r_2$ ,  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \vec{e}_\theta$  si  $r_2 < r < r_3$ ,  $\vec{0}$  si  $r > r_3$ .

24 - 1.  $r > R$ :  $\vec{B} = \mu_0 \frac{j R^2}{2r} \vec{e}_\theta$ ;  $r < R$ :  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OM}$ ; 2.  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OO'}$ .

## 7 Dipôles magnéostatiques

**Exercice 25 - Moment dipolaire magnétique terrestre :** La Terre de centre  $O$  et de rayon  $R_T$ , d'axe polaire  $(O, \vec{e}_z)$  orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipôle magnétique de moment dipolaire :  $\vec{m} = m \vec{e}_z$ . On repère un point  $M$  du globe terrestre par  $r = R_T = 6371$  km,  $\theta$  fixé, et  $\varphi$  quelconque. On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par le dipôle :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta.$$

- Exprimer la latitude  $\lambda$  comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de  $\theta$ .  
À Paris ( $\lambda = 49^\circ$ ), le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_T$  est vers le sol : il fait un angle  $I = -65^\circ$  avec l'horizontale et sa composante horizontale est  $B_h = 20 \mu\text{T}$ .
- Exprimer la composante verticale  $B_v$  du champ magnétique terrestre puis norme  $B_T$  du champ magnétique terrestre.
- Déduire la valeur du moment dipolaire magnétique terrestre  $m$ .

**Exercice 26 - Interaction de deux dipôles magnétiques à distance constante :** On étudie deux dipôles magnétiques de moments dipolaires respectifs  $\vec{m}_1$  et  $\vec{m}_2$ . Le premier est fixe en  $O$ , centre d'un repère sphérique d'axe polaire  $(0, \vec{e}_z)$ , parallèle à son moment dipolaire :  $\vec{m}_1 = m_1 \vec{e}_z$ . Le second dipole est placé en  $r = \text{cste}$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi = 0$ . On repère son moment dipolaire par l'angle  $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{m}_2)$  qui peut varier. On suppose de plus que  $\vec{m}_2$  est dans le plan  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par le dipôle :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta .$$

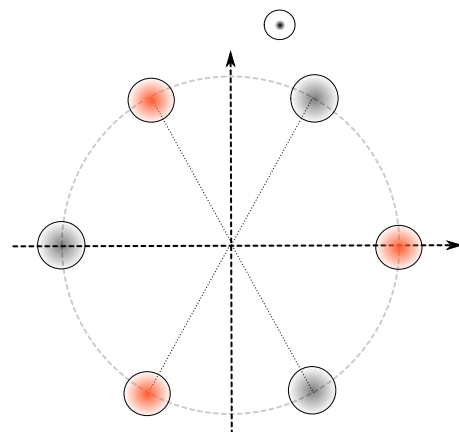
1. Exprimer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(\alpha)$  d'interaction du second dipôle avec le champ magnétique créé par le premier dipôle.
2. Que doit vérifier  $\tan(\theta - \alpha)$  à l'équilibre ?
3. Application : que vaut  $\alpha$  si l'équilibre est stable et  $\theta = 0$  ?  $\pi/2$  ?  $\pi$  ? Justifier ce du point de vue des lignes de champs.

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p>25 - 1. <math>\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}</math>; 2. <math>B_\theta = 43 \mu\text{T}</math> et</p>	<p>26 - 1. <math>-\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi} (2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) -</math></p>	<p><math>\sin \theta \sin(\theta - \alpha))</math>; 2. <math>2 \tan(\theta - \alpha) = \tan \theta</math>; 3. <math>\alpha = 0</math> dans les 3 cas.</p>
--	--	---

## 8 Pour aller plus loin...

**Exercice 27 - Piège hexapolaire :**

On considère la configuration ci-dessous, où 6 fils infinis, disposés parallèlement à l'axe  $(Oz)$ , sont placés en des points équidistants le long d'un cercle de rayon  $a$ , comme dans le schéma ci-dessous. 3 fils ont une densité linéique de charge  $+\lambda$ , 3 autres une densité linéique de charge  $-\lambda$ , comme indiqué sur le schéma. On cherche à connaître le potentiel au voisinage du centre  $O$ . Dans cet exercice, on notera  $i$  l'unité imaginaire.



1. Quelles sont les symétries auxquelles obéissent le champ électrique et le potentiel dans ce problème ?
2. Rappeler l'expression du potentiel généré par un fil infini dans tout l'espace.
3. En choisissant le potentiel nul sur l'axe central, montrer que le potentiel en un point  $P$  quelconque s'écrit

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{PA_2 \cdot PA_4 \cdot PA_6}{PA_1 \cdot PA_3 \cdot PA_5} \right)$$

4. En écrivant les coordonnées du point  $P$  sous forme complexe  $z = re^{i\theta}$ , montrer

$$\frac{PA_2 \cdot PA_4 \cdot PA_6}{PA_1 \cdot PA_3 \cdot PA_5} = \left| \frac{a^3 + z^3}{a^3 - z^3} \right| .$$

5. Enfin, montrer qu'au voisinage de l'axe central, on trouve

$$V(r, \theta) \simeq \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{r}{a} \right)^3 \cos 3\theta .$$

Commenter.

**Exercice 28 - Étude électrostatique de l'atome d'hydrogène :** La fonction d'onde du niveau fondamental électronique de l'atome d'hydrogène s'écrit  $\psi(r) = \mathcal{N} \exp(-r/a_0)$ . Le rayon de Bohr  $a_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_y}$ , avec  $R_y = 13.6 \text{ eV}$  l'énergie de Rydberg est l'échelle typique de décroissance de l'amplitude de probabilité.

1. Comment calcule-t-on le préfacteur  $\mathcal{N}$ ? Que représente physiquement la quantité  $a_0$ ?
2. En considérant le noyau (de charge  $+e$ ) comme étant localisé en  $r = 0$ , trouver à l'aide du théorème de Gauss le champ électrostatique créé dans tout l'espace par l'atome d'hydrogène.
3. Quel est le résultat attendu lorsque la distance au noyau devient grande devant le rayon de Bohr?

**Exercice 29 - Modèle classique du spin de l'électron :** Une modélisation simpliste du « spin » de l'électron est donnée par une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant une charge volumique  $\rho$  homogène, qui tourne autour de l'un de ses diamètres ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire uniforme  $\omega$ .

1. Exprimer le courant  $dI$  créé par la spire circulaire virtuelle repérée par la distance  $r$  (à  $dr$  près) à  $O$  et par l'angle  $\theta$  (à  $d\theta$  près) par rapport à ( $Oz$ ).
2. Quel est le moment dipolaire magnétique élémentaire  $d\vec{m}$  associé à cette spire, en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $r$  et  $\theta$ ?
3. En déduire le moment dipolaire magnétique total  $\vec{m}$  de l'électron en fonction de  $e$  (la charge de l'électron),  $R$  et  $\omega$ .

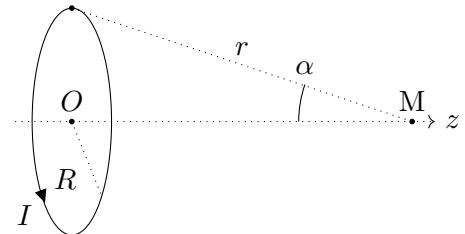
On admet que la valeur du moment dipolaire magnétique est celui du magnéton de Bohr  $m = \mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  et que le rayon de la sphère doit être  $R = 2.8 \text{ fm}$ .

4. Que vaut la vitesse angulaire  $\omega$ ?
5. En déduire la vitesse maximale  $v_{\text{max}}$  d'un point de la sphère. Que faut-il conclure d'un tel résultat?

**Exercice 30 - De la spire à la bobine :**

On considère une spire circulaire de rayon  $R$ , parcourue par un courant  $I$  et d'axe de révolution  $Oz$  comme sur la figure ci-contre. On admettra que le champ magnétique créé par la spire au point  $M$  situé sur l'axe  $Oz$  s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

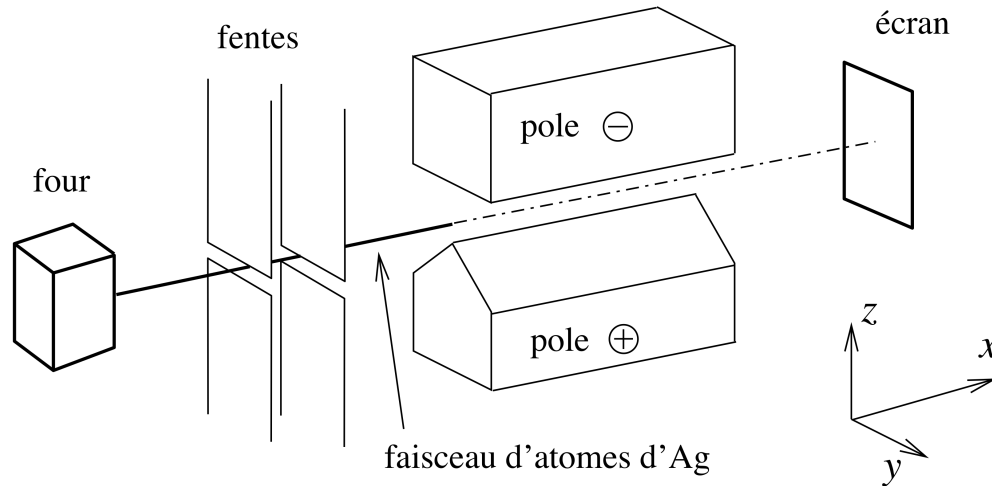


où  $\alpha$  est l'angle sous lequel le point  $M$  voit la spire.

1. À partir des symétries et des invariances, retrouver les dépendances et la direction du champ magnétique sur l'axe.
2. Quelle est l'expression du champ magnétique en fonction de  $z$ ?
3. Tracer la courbe  $B(z)$ . Commenter. Où le champ est maximal? On pourra prendre comme valeurs :  $I = 1 \text{ A}$ ,  $R = 5 \text{ cm}$ .
4. Un point  $N$ , voisin de  $M$  mais en dehors de l'axe, se trouve à la même côté  $z$  mais à une distance  $r$  faible de l'axe avec  $r \ll R$ . Refaire l'étude des symétries et des invariances pour ce point  $N$ .
5. À partir de la conservation du flux du champ magnétique à travers un petit cylindre centré sur  $M$  et passant par  $N$ , déterminer la composante radiale  $B_r$  du champ en  $N$ .
6. Commenter le signe trouvé dans l'expression de  $B_r(N)$ .  
On considère maintenant une bobine de longueur  $L$ , comprenant  $N$  spires, parcourues par un courant  $I$ . On considère toujours un point  $M$  sur l'axe de révolution de la bobine.
7. À partir des invariances et des symétries, exprimer la direction et les dépendances du champ magnétique créé sur l'axe de révolution de la bobine.
8. Déduire de l'expression du champ magnétique d'une spire, le champ magnétique créé par la bobine sur son axe. On pourra introduire le nombre de spires par de longueur  $n = N/L$ .
9. Tracer le champ magnétique en fonction de l'abscisse  $z$  pour  $L = R$  et  $L = 10R$ . On prendra  $z = 0$  au centre de la bobine. On pourra prendre 100 spires quelque soit la longueur de la bobine.
10. Retrouver le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long. En déduire que le champ magnétique en dehors de la bobine infinie est rigoureusement nul.

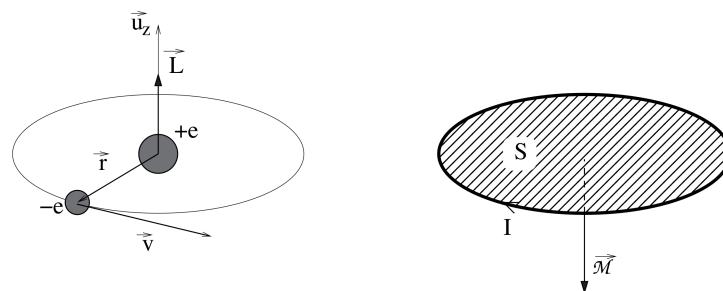
**Exercice 31 - Expérience de Stern & Gerlach :** Le but de cette expérience est de montrer l'existence d'un moment magnétique atomique et de sa quantification. Dans cette expérience, Stern & Gerlach ont utilisé des atomes d'argent car toutes les couches électroniques sont pleines sauf la sous-couche 5s qui contient un électron. Comme les couches (et sous-couches) pleines ont un moment magnétique nul, le moment magnétique ne peut provenir que de l'électron 5s. Si il y a moment magnétique propre associé à l'électron 5s, on doit observer une déviation des atomes d'Ag; leur position sur l'écran donnera une information sur le moment magnétique propre de l'électron et ses directions possibles.

L'argent est porté à haute température dans un four. Les atomes en s'évaporant sont éjectés par un trou dans la paroi du four avec une énergie cinétique proportionnelle à la température,  $\mathcal{E}_c = \frac{3}{2}k_B T$ . Ce faisceau d'atomes passe par des fentes alignées avec l'orifice du four et l'écran, de sorte qu'il passe au milieu de l'entrefer de l'électroaimant. Pour cette expérience, il est important d'avoir un gradient de champ magnétique élevé. Pour cela, on utilise un électroaimant dont les pièces polaires, représentées sur la figure 1 par pôle + et pôle -, sont réalisées en matériau ferromagnétique et sont saturées par l'application d'un champ magnétique produit par des bobines (non représentées ici).



**Fig. 1** – Configuration de l'expérience historique. Les pièces polaires ont une longueur  $2\ell$  suivant  $x$  et l'écran est placé à une distance  $D$  derrière les pôles de l'électro-aimant.

Selon le modèle planétaire circulaire, l'atome d'hydrogène est composé d'un électron de masse  $m_e$  gravitant autour d'un proton de masse  $m_p$  à une distance  $r_1$  appelée premier rayon de Bohr. Ce système est équivalent à une boucle de courant (voir figure 2).



**Fig. 2** – Atome d'hydrogène et boucle de courant ampérien équivalente.

1. Qu'est-ce qui justifie l'hypothèse selon laquelle le noyau est immobile ?
2. Donner les expressions des 2 forces agissant sur l'électron. Montrer que l'une d'entre elles est négligeable.
3. Exprimer le courant en fonction de la charge, du rayon  $r$  et de la vitesse tangentielle de l'électron  $\vec{v}$ . En déduire l'expression du moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  associé.
4. Exprimer  $\vec{\mathcal{M}}$  en fonction du moment cinétique orbital noté  $\vec{L}$ .
5. En mécanique quantique, on montre que le moment cinétique orbital d'un électron est un nombre entier de fois le quantum  $\hbar = h/2\pi$ , où  $h$  est la constante de Planck. En déduire l'expression du magnéton de Bohr,  $\mu_B$ , la plus petite valeur permise du moment magnétique. Faire l'application numérique.

En réalité, les moments cinétique et magnétique orbitaux de l'électron sont nuls en moyenne car son orbitale est sphérique. Cependant, l'électron possède un moment cinétique propre  $\vec{S}$ , qu'on appelle spin par analogie à la toupie, et qui est un demi entier de  $\hbar$ . Le moment magnétique propre de l'électron a toujours une valeur  $\mu_B$  et c'est en fait celui-ci qui est mis en évidence dans l'expérience de Stern et Gerlach.

On étudie la trajectoire des atomes d'argent éjectés du four (voir figure 1) en considérant que tout le

système est parfaitement aligné sur la cote  $z = 0$ , de sorte qu'en l'absence de champ tous les atomes vont être recueillis sur l'écran au point de coordonnées  $(\ell + D, 0, 0)$  (l'origine des  $x$  est au milieu du pôle). Le faisceau passe au centre entre les pièces polaires de l'électro-aimant où le gradient de champ est considéré uniforme et où  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ .

6. On applique le champ magnétique  $B\vec{u}_z$  à l'électron, tel que  $\theta$  représente l'angle constant entre  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$ . Calculer la force qui s'applique sur le moment magnétique si le champ ne varie que selon  $z$ .
7. Appliquer le théorème du moment cinétique au moment dipolaire  $\vec{M}$ . En déduire l'équation différentielle sur  $\vec{M}$  et montrer que  $\|\vec{M}\|$  et la projection de  $\vec{M}$  sur  $z$ ,  $M_z$ , sont indépendantes du temps. En déduire que le mouvement de  $\vec{M}$  décrit un cône d'axe  $\vec{B}$  dont on calculera la pulsation de précession  $\omega$  en fonction de  $e$ ,  $m_e$  et  $B$ .
8. Expliquer avec des arguments qualitatifs pourquoi les composantes suivant  $x$  et  $y$  de  $\vec{M}$  sont nulles en moyenne.
9. On considère un atome qui entre dans l'entrefer tel que  $\theta$  représente l'angle entre  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$ . Calculer l'ordonnée du point d'impact sur l'écran en fonction de  $\mathcal{M}$ ,  $\theta$ ,  $\partial B_z/\partial z$ ,  $T$ ,  $\ell$ ,  $D$  et  $k_B$ .
10. Quelle serait la forme de la trace observée sur l'écran si les moments magnétiques étaient orientés avec une direction aléatoire.
11. On observe deux tâches d'ordonnées  $z_1 = -z_2 = 5.2$  mm. Que peut-on dire sur les directions des moments? Calculer les valeurs possibles de  $\mathcal{M}_z$  pour  $T = 1200$  K,  $2\ell = 1$  m,  $D = 1$  m,  $\partial B_z/\partial z = 7$  T/m. Commenter ce résultat.

Données :

- ▷ Charge élémentaire  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C ;
- ▷ Constante universelle de gravitation  $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup> · s<sup>-2</sup> ;
- ▷ Permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F · m<sup>-1</sup> ;
- ▷ Constante de Boltzmann  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J · K<sup>-1</sup> ;
- ▷ Masse des nucléons  $m_{\text{proton}} \approx m_{\text{neutron}} = 1.67 \times 10^{-27}$  kg ;
- ▷ Masse de l'électron  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  kg ;
- ▷ Constante de Planck  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  J · s.

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p><b>27</b> - 2. <math>V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + V_0</math>.</p> <p><b>28</b> - 1. <math>\mathcal{N} = a_0^{-3/2}/\sqrt{\pi}</math>; 2. Pour l'électron; <math>\rho(r) = -e \Psi(r) ^2</math> d'où <math>\vec{E} = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 r^2} e^{-2r/a_0} \left(2 + 2\frac{r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2}\right) \vec{e}_r</math>.</p>	<p><b>29</b> - 1. <math>dI = \rho\omega r^2 \sin\theta dr d\theta</math>; 2. <math>d\vec{m} = \pi\rho\omega r^4 (\sin\theta)^3 dr d\theta \vec{e}_z</math>; 3. <math>-\frac{1}{5}e\omega R^2 \vec{e}_z</math>; 4. <math>3.7 \times 10^{25}</math> rad/s; 5. <math>1.0 \times 10^{11}</math> m/s.</p> <p><b>30</b> - 2. <math>\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z</math>; 4. <math>\vec{B}(N) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z</math>;</p>	<p>5. <math>B_r(N) = B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz}</math>; 8. <math>\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \vec{e}_z</math>.</p> <p><b>31</b> - 5. <math>\mu_B = \frac{he}{2m_e}</math>; 7. <math>\omega = \frac{Be}{2m_e}</math>; 9. <math>z_f = \frac{2\ell(\ell + D)}{k_B T} \mathcal{M} \frac{dB}{dz} \cos\theta</math>; 11. <math>8.2 \times 10^{-24}</math> A · m<sup>2</sup>.</p>
--	---	--

## 9 Sujets d'oraux

**Oral 1 - Mines-Ponts - Mouvement de particule chargée :** On lance une particule, de charge  $q$  et de masse  $m$ , à une distance  $a$  d'un fil infini parcouru par une intensité  $I$ .

La vitesse initiale de la particule est  $v_0$ , parallèle au fil.

1. Donner les dimensions de  $u = \frac{\mu_0 q I}{2\pi m}$  et de  $\alpha = \frac{v_0}{u}$ . Que dire de la trajectoire de la particule si  $\alpha \ll 1$  et  $\alpha \gg 1$  ?
2. Déterminer le plan dans lequel se trouve la trajectoire.
3. Déterminer le temps nécessaire pour que la composante de la vitesse de la particule le long de l'axe du fil soit nulle.

**Oral 2 - Mines-Ponts - Distribution de charge exponentielle :** On considère la distribution volumique de charge suivante

$$\rho(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ -\rho_0 \exp(-z/a) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

où  $a$  et  $\rho_0$  sont positifs.

Le plan  $(O, x, y)$  est donné d'une distribution surfacique de charge  $\sigma = +\rho_0 a$ .

Trouver  $\vec{E}(z)$  en tout point de l'espace.

**Oral 3 - Polytechnique - Mouvement de particule chargée :** On considère une plaque comprise entre  $x = 0$  et  $x = a$  uniformément chargée en volume, de charge volumique  $\rho_0$ . On considère que la surface  $S$  de la plaque est telle que  $S \gg a^2$ . On considère une particule ponctuelle de masse  $m$  et de charge  $q$  telle que  $\rho_0 q > 0$ . Cette particule est lancée sur la plaque avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ ,  $v_0 > 0$  en  $x = 0$ .

1. Calculer la vitesse  $v_0$  minimale pour que la particule traverse la plaque.
2. Donner la loi horaire vérifiée par la position de la particule  $x(t)$ .
3. Quelle est la durée de la traversée ? Que dire si  $a \ll v_0 \tau$  ?

---

**Éléments de réponse :**

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1} - 1. [\alpha] = 1; 3. t_a = \frac{a}{u} \int_0^\alpha \frac{\exp(-x) dx}{\sqrt{x(2\alpha - x)}}. \\
 \mathbf{2} - \vec{E} = E_0 \vec{e}_z \text{ si } z < 0 \text{ et } \text{vec} E =
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \left( E_0 + \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} \exp(-z/a) \right) \vec{e}_z. \\
 3 - 1. v_0 \geq \sqrt{\frac{q\rho_0 a^2}{4m\varepsilon_0}}; 2. x(t) =
 \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{a}{2} (1 - \cosh(t/\tau)) + v_0 \tau \sinh(t/\tau) \text{ avec } \tau = \\
 \sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\rho_0}}; 3. t_1 = \tau \ln \left( \frac{1 + \frac{a}{2v_0\tau}}{1 - \frac{a}{2v_0\tau}} \right).
 \end{array} \right.$$


---