

Table des matières

1 Révisions de première année : induction	1
2 Équations de Maxwell	3
3 Énergie du champ électromagnétique	5
4 Propagation du champ électromagnétique dans le vide	6
5 Propagation du champ électromagnétique dans les milieux	7
6 Dipôle rayonnant	8
7 Champ aux interfaces	9
8 Pour aller plus loin...	10
9 Sujets d'oraux	12

1 Révisions de première année : induction

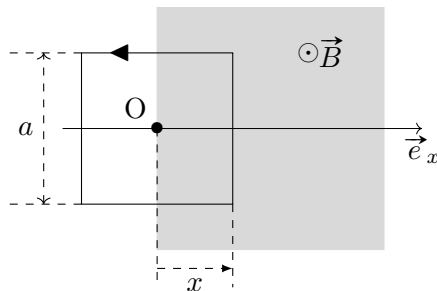
Exercice 1 - Chauffage par induction : Le chauffage par induction est beaucoup utilisé dans nos foyers avec les plaques de cuisson dites « à induction » mais également dans l'industrie pour chauffer fortement des matériaux afin de les ramollir ou les faire fondre. Nous présentons ici le chauffage par induction d'un anneau métallique placé dans une bobine.

On place un anneau métallique assimilé à une spire de rayon $r = 2.5 \text{ cm}$ et de résistance $R = 0.1 \Omega$ dans une bobine qu'on considérera comme infiniment longue possédant une densité linéique de spires n . On alimente la bobine par un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. La bobine et l'anneau ont le même axe de révolution Oz . Le champ à l'intérieur de la bobine infiniment longue, appelé solénoïde, vaut $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$ où on aura orienté l'axe Oz par rapport au sens du courant dans la bobine et la règle de la main droite. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

- Exprimer le flux magnétique à travers l'anneau.
- En déduire la force électromotrice induite ainsi que le courant induit. On négligera l'auto-induction dans ce cas.
- Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau en fonction du temps.
- En déduire la puissance dissipée en moyenne.
- Sachant que la bobine possède 200 spires par mètre et qu'on alimente avec une fréquence de 100 kHz, calculer l'amplitude courant I_0 nécessaire pour chauffer avec une puissance de 500 W dans l'anneau.
- Sachant que la capacité calorifique du cuivre est de $c = 385 \text{ J/K/kg}$ et que la température de fusion est de $1085 \text{ }^\circ\text{C}$, combien de temps faut-il chauffer l'anneau de cuivre de 20 g pour qu'il fonde. On négligera toute perte thermique et on donnera ainsi une durée de chauffe minimale. On admet que la quantité d'énergie thermique à apporter pour faire passer une masse m de la température T_i à la température T_f vaut $mc(T_f - T_i)$.

Exercice 2 - Cadre mobile dans un champ magnétique uniforme : On considère une spire conductrice carrée, de côté a , de résistance R , d'inductance négligeable et de masse m , pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal suivant un axe Ox . Dans la portion de l'espace indiquée en grisé sur la figure règne un champ magnétique uniforme, dirigé vers le haut.

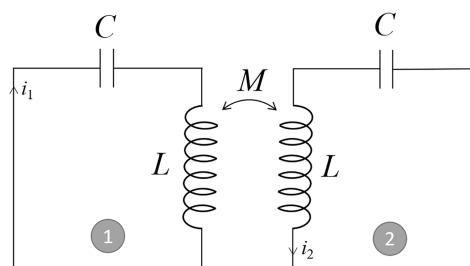
Si $x < 0$, la spire est complètement en dehors du champ magnétique ; elle y est complètement immergée si $x > a$. Pour $x < 0$, la vitesse de la spire est $v_0 = v_0 \vec{e}_x$.



1. Expliquer qualitativement le phénomène qui se produira au moment où la spire « entre » dans le champ magnétique.
2. Déterminer la f.é.m. induite ainsi que l'intensité du courant induit dans la spire pour $0 < x < a$.
3. En déduire l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la spire.
4. Établir l'équation différentielle dont la vitesse $v(t)$ de la spire est solution puis déterminer $v(t)$.
5. Quel est le mouvement de la spire quand elle est complètement immergée dans le champ magnétique ? Quelle est sa vitesse ?

Exercice 3 - Résonance de circuits LC couplés : On considère les deux circuits LC identiques du schéma ci-dessous couplés via les bobines avec un coefficient d'inductance mutuelle M .

On note L les inductances et C les capacités. On note 1 le circuit de gauche et 2 celui de droite. Le condensateur 1 (à gauche) est initialement chargé avec une charge q_0 sur l'armature de gauche et donc $-q_0$ sur celle de droite. Le condensateur 2 (à droite) est initialement déchargé. À l'instant $t = 0$ on ferme le circuit 1 à l'aide d'un interrupteur et on étudie l'évolution des charges des condensateurs au cours du temps.



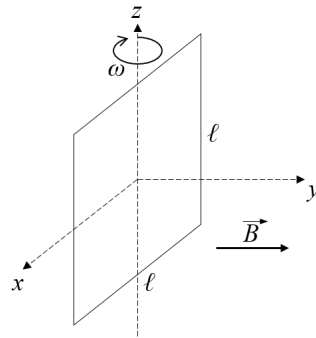
1. Établir les équations différentielles couplées sur les charges q_1 et q_2 des condensateurs 1 et 2. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $K = \frac{M}{L}$, dont on donnera les significations.
2. En posant $S = q_1 + q_2$ et $A = q_1 - q_2$, établir les équations différentielles découplées sur les nouvelles variables S et A . On posera les nouvelles pulsations caractéristique ω_S et ω_A .
3. Résoudre les équations sur S et A .
4. En déduire les expressions des charges q_1 et q_2 en fonction du temps et des conditions initiales. On les présentera sous forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

On ajoute dans le circuit 1 un générateur de tension sinusoïdale de la forme $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On ne se préoccupe pas du régime transitoire.

5. Comment sont modifiés les équations différentielles couplés sur q_1 et q_2 ?
6. En se plaçant en régime sinusoïdal forcé et en posant $\underline{q}_1 = \alpha_1 e^{j\omega t}$ et $\underline{q}_2 = \alpha_2 e^{j\omega t}$, déterminer les expressions de α_1 et α_2 en fonction de E_0 , L , ω_0 , K et ω .
7. Montrer que les racines du dénominateur commun à α_1 et α_2 sont ω_S et ω_A . Factoriser celui-ci pour trouver les points de divergence.
8. Tracer les amplitudes a_1 et a_2 des charges q_1 et q_2 en fonction de la pulsation. Que remarque-t-on ?
9. En pratique, pourquoi la quantité de charge dans les condensateurs ne tendent pas vers l'infini ?

Exercice 4 - Alternateur : Un alternateur est un système permettant de transformer de la puissance mécanique en puissance électrique permettant ainsi que fabriquer de l'électricité afin de s'en servir pour autre chose. On considère un cadre métallique, de résistance R , carré de côté ℓ qui tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω grâce à l'application d'un couple d'un opérateur $\vec{\Gamma}_o$. À $t = 0$, on prendra le vecteur surface de la spire aligné avec le champ magnétique.

Ce cadre est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme selon l'axe Oy : $\vec{B} = B \vec{e}_y$. Un schéma de la situation est présenté ci-dessous. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe Oz .



1. Retrouver la force électromotrice induite dans le cadre.
2. Ce cadre, et le courant induit qui le traverse, crée un champ magnétique qui crée un flux propre. On note alors L le coefficient d'auto-inductance. Écrire l'équation électrique du cadre dans ce cas.
3. Effectuer un bilan des moments pour en déduire l'équation mécanique.
4. Résoudre l'équation électrique pour trouver $i(t)$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$. Que se passe-t-il si on attend le régime permanent ?
5. En déduire le couple extérieur à fournir au cours du temps et en moyenne.
6. Montrer que l'ensemble de la puissance mécanique fournie est transformée en puissance électrique qui est dissipée par effet Joule.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>1 - 2. $e(t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di}{dt}(t)$; 4. $P_J = \frac{(\pi r^2 \mu_0 n I_0 \omega)^2}{2R}$; 5. 32 A; 6. 16 s.</p> <p>2 - 4. $m\dot{v} = -va^2 B^2/R$ d'où $v(t) = v_0 \exp[-t/\tau]$ avec $\tau = mR/(a^2 B^2)$; 5. $t_a =$</p>	<p>$-\tau \ln\left(1 - \frac{a}{v_0 \tau}\right)$ et $v_a = v_0 - a/\tau$.</p> <p>3 - 4. $\omega_S = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}$, $\omega_A = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}$, $S(t) = q_0 \cos(\omega_S t)$, $A(t) = q_0 \cos(\omega_A t)$; 6. $\alpha_1 = \frac{E_0}{L} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - K^2 \omega^4}$,</p>	<p>$\alpha_2 = \frac{E_0}{L} \frac{K \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - K^2 \omega^4}$.</p> <p>4 - 4. $i(t) = \frac{\ell^2 B \omega}{R} \frac{1}{1+(\tau\omega)^2} (\sin(\omega t) - \omega\tau \cos(\omega t))$; 5. $\langle \Gamma_o \rangle = -\frac{\ell^4 B^2 \omega}{2R} \frac{1}{1+(\tau\omega)^2}$; 6. $\langle Ri^2(t)\omega \rangle = \frac{\ell^4 B^2 \omega^2}{2R^2} \frac{1}{1+(\tau\omega)^2}$.</p>
---	--	---

2 Équations de Maxwell

Exercice 5 - Utilisation de Maxwell-Gauss : On considère une région vide de charge dans laquelle est établi un champ de la forme (en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z.$$

1. Quelle symétrie présente ce champ électrique ?
2. Quelle équation est vérifiée par ce champ électrique ?
3. Montrer que si l'on connaît le champ électrique sur l'axe $\vec{E}(r = 0, z)$, alors on peut calculer le champ électrique en un point proche de l'axe, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques.

On rappelle en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Exercice 6 - Une solution réaliste des équations de Maxwell : On cherche une solution des équations de Maxwell dans le vide sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \\ \vec{B}(M, t) &= g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y, \end{aligned}$$

pour tout point M et tout instant $t > 0$ (le champ est nul pour $t < 0$). Cette solution présente l'intérêt physique d'être un signal réaliste, puisque limité dans le temps.

1. Montrer que les expressions précédentes satisfont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. En utilisant les équations de Maxwell, trouver les équations satisfaites par les fonctions f et g .
3. On impose que f est paire, et que

$$\vec{E}(O, 0) = E_0 \vec{e}_x.$$

En déduire les expressions des champs électrique et magnétique.

4. Calculer le vecteur de Poynting associé à cette solution.

Exercice 7 - Condensateur en régime variable : Cet exercice a pour but de mettre en oeuvre l'approximation des régimes quasi stationnaires dans sa version électrique (aussi appelée ARQS des condensateurs). On utilisera également le théorème d'Ampère sous sa forme généralisée tenant compte du courant de déplacement.

On s'intéresse à un condensateur plan composé de deux armatures circulaires de rayon a et d'axe commun (Oz). Elles sont distantes de $\ell \ll a$. Le condensateur est placé en série avec une résistance R et un générateur de tension $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

1. Le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est supposé égal à $\vec{E}_0 = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z$. Calculer le champ magnétique \vec{B}_1 induit dans le condensateur par le champ électrique variable en utilisant le théorème d'Ampère.
2. Le champ magnétique \vec{B}_1 étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique \vec{E}_2 . Déterminer ce deuxième champ \vec{E}_2 en supposant $\vec{E}_2(r=0) = \vec{0}$. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur sous la forme :

$$\vec{E} = \left[1 - \alpha \left(\frac{r\omega}{c} \right)^2 \right] \vec{E}_0,$$

où α est une constante à déterminer.

On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, on a

$$\vec{\text{rot}} \vec{X} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z.$$

3. À quelle condition se trouve-t-on dans l'approximation des régimes quasi stationnaires? Le champ (\vec{E}, \vec{B}_1) est-il compatible avec l'équation de Maxwell-Ampère? Comment pourrait-on résoudre la difficulté qui se pose?
4. On cherche une solution exacte du problème sous la forme :

$$\vec{E}(r, t) = E(r) e^{j\omega t} \vec{e}_z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\omega}{c} \right)^n e^{j\omega t} \vec{u}_z.$$

- (a) Montrer que $\Delta E(r) = -\frac{\omega^2}{c^2} E(r)$ avec Δ l'opérateur Laplacien scalaire qui, en coordonnées cylindriques, s'exprime par

$$\Delta a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

- (b) Déterminer une relation de récurrence entre les a_n , et trouver alors l'expression du champ électrique dans le condensateur.

Exercice 8 - Un photon de masse non-nulle : La construction de la théorie sur laquelle s'appuie la description de l'interaction lumière-matière repose largement sur le fait que le photon (particule associée au champ électromagnétique dans une description quantique) a une masse non-nulle. Jusqu'ici, aucune expérience n'a pu mettre cette hypothèse en défaut. En effet, les expériences les plus récentes imposent une borne supérieure égale à 10^{-52} kg pour la masse du photon.

Le but de cet exercice est d'analyser les conséquences d'une masse non-nulle du photon sur le potentiel électrique V . Les équations de Maxwell couplant les champs électrique et magnétique entre eux, cette modification de V aura des conséquences sur l'ensemble du champ électromagnétique.

Dans l'hypothèse d'un photon de masse m non-nulle, les équations de Maxwell avec source (les deux autres restent inchangées) se réécrivent

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \eta^2 V \quad \text{et} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \eta^2 \vec{A},$$

avec $\eta = \frac{mc}{\hbar}$ et \vec{A} le potentiel vecteur vérifiant $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$.

Considérons une sphère creuse de rayon R et de centre O chargée uniformément $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ en surface. On cherche une solution des équations de Maxwell sous la forme

$$V(r, t) = \frac{f(r)}{r} \text{ et } \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

- Écrire l'équation différentielle vérifiée par f et la résoudre. On distinguera les cas $0 < r < R$ et $r > R$. On imposera la continuité de V , que V reste borné lorsque $r \rightarrow 0$ et enfin que V tend vers 0 à l'infini. On utilisera l'expression du laplacien en coordonnées sphériques $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2}$.
- En utilisant la discontinuité du champ électrique à la traversée de la surface de la sphère

$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r,$$

exprimer V en fonction de σ , η et R . On supposera par la suite que $\eta R \ll 1$ et on notera $V(r = 0) = V_0$. Pourquoi trouve-t-on ici une expression du champ électrique différente de celle que donnerait le théorème de Gauss ?

- Donner une expression approchée de V au voisinage de $r = 0$ au premier ordre en $\eta^2 r^2$.
- Entre deux sphères concentriques dont les rayons diffèrent de 9 cm, on mesure une variation relative du potentiel de $|\delta V/V| < 0.32 \times 10^{-9}$. Commenter.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>5 - 3. $E_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(r = 0, z)$.</p> <p>6 - 2. $f''(z) - \frac{1}{\tau^2 c^2} f(z) = 0$; 4.</p>	$\left. \begin{array}{l} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cosh\left(\frac{z}{c\tau}\right) \sinh\left(\frac{z}{c\tau}\right) e^{-2t/\tau} \vec{e}_z. \\ \mathbf{7} - 1. \vec{B}_1 = j \frac{\mu_0 \epsilon_0 r \omega E_0}{2} e^{j\omega t} \vec{e}_\theta; 2. \alpha = 1/4; \\ 4. a_n = -a_{n-2}/n^2. \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \mathbf{8} - 2. V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} e^{-\eta R} \frac{\sinh \eta r}{\eta r} \\ \text{et } V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \sinh \eta R \frac{e^{-\eta r}}{\eta r}; 3. \\ V \simeq V_0 \left(1 + \frac{\eta^2 r^2}{6}\right); 4. 4.07 \times 10^{-47} \text{ kg.} \end{array} \right\}$
---	--	---

3 Énergie du champ électromagnétique

Exercice 9 - Bilan d'énergie dans un conducteur cylindrique : On considère un conducteur cylindrique d'axe (Oz) , de rayon R , de hauteur $h \gg R$ et de conductivité σ . Le conducteur est parcouru par un courant I uniformément réparti dans tout le volume.

- Comment s'écrit le champ électrique \vec{E} dans le conducteur ?
- Déterminer le champ magnétique en tout point du conducteur.
- Déterminer le vecteur de Poynting en tout point du conducteur. Calculer son flux à travers la surface entourant le conducteur. Commenter.
- Vérifier et commenter par calcul direct la conservation locale et globale de l'énergie. La divergence d'un vecteur radial en coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'écrit $\text{div}(X \vec{e}_r) = \frac{1}{r} \frac{d(rX)}{dr}$.

Exercice 10 - Solénoïde en régime variable : On étudie un solénoïde de longueur ℓ et de rayon a , constitué de N spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant $i(t)$. On suppose $\ell \gg a$, de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.

- Calculer le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur du solénoïde. On supposera $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.
- Calculer le champ électrique $\vec{E}(r, t)$ induit en fonction de $i(t)$, μ_0 , r , $n = N/\ell$ et a . On se limitera au cas $r < a$.
- Le solénoïde est parcouru par un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.
 - Exprimer la densité volumique d'énergie magnétique w_B .
 - Exprimer la densité volumique d'énergie électrique w_E .
 - Que peut-on dire du rapport des valeurs moyennes $\frac{\langle w_E \rangle}{\langle w_B \rangle}$ dans la limite $a \ll \lambda$?
- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ pour $r = a$ en fonction de μ_0 , n , a , et $i(t)$.
- Déterminer l'expression de l'énergie électromagnétique \mathcal{E}_m emmagasinée à l'instant t dans le solénoïde en fonction de μ_0 , n , a , ℓ et $i(t)$.
- Déterminer l'expression du coefficient d'inductance propre \mathcal{L} en fonction de N , μ_0 , a et ℓ .

Exercice 11 - Résistance de fuite dans un condensateur cylindrique : Un système électrique cylindrique, de hauteur h , est constitué de deux cylindres métalliques creux coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre intérieur reçoit initialement une charge $+\frac{Q}{2}$ et le cylindre extérieur une charge $-\frac{Q}{2}$. Le milieu qui les sépare a les propriétés diélectriques du vide, mais il est légèrement conducteur, de conductivité γ . On négligera les effets de bord, ainsi que la dépendance en fréquence de la conductivité.

- Déterminer la valeur du champ électrique à l'instant initial. Faire de même à l'état final.
- Que vaut le champ magnétique à tout instant ? Comment s'écrit la variation d'énergie électromagnétique entre l'instant initial et l'instant final ?
- Que vaut le vecteur de Poynting ? Que peut-on dire de la variation d'énergie électromagnétique calculée précédemment ?
- Déterminer le vecteur densité de courant électrique \vec{j} à tout instant. En déduire la quantité d'énergie dissipée par effet Joule. Commenter.

Exercice 12 - Courants de Foucault : On considère un conducteur cylindrique de rayon R , de longueur infinie, et de conductivité γ . Ce conducteur est placé dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe de révolution :

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

- Calculer la distribution de courant \vec{j}_1 induite par ce champ magnétique. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z.$$

- En déduire la puissance dissipée \mathcal{P} par unité de longueur du conducteur.
- Un champ \vec{B}_1 est produit par le courant induit \vec{j}_1 . Calculer ce champ induit dans le cadre de l'ARQS magnétique. Comment se compare-t-il au champ appliqué ?

<p>Éléments de réponse :</p> <p>9 - 1. $\vec{E} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma} \vec{e}_z$; 2. $\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta$.</p> <p>10 - 2. $\vec{E} = -\frac{\mu_0 r n}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta$; 4. $\vec{\Pi} =$</p>	<p>$-\frac{\mu_0 a n^2}{4} \frac{di^2}{dt} \vec{e}_r$; 6. $L = \pi \mu_0 \frac{N^2 a^2}{\ell}$.</p> <p>11 - 2. $\Delta W = -\frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$; 4. $\vec{j} =$</p>	<p>$\gamma e^{-t/\tau} \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{e}_r$.</p> <p>12 - 1. $\vec{j} = \frac{\gamma r \omega B_0}{2} \sin \omega t \vec{e}_\theta$; 2. $\mathcal{P} = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_0^2 R^4}{16}$; 3. $\vec{B}_1 \approx -\mu_0 \gamma \frac{r^2 \omega B_0}{2} \sin \omega t \vec{e}_z$.</p>
--	--	---

4 Propagation du champ électromagnétique dans le vide

Exercice 13 - Onde électromagnétique plane progressive : On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad E_x = E_0 \exp\left(i \left(\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t\right)\right)$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 600 \text{ nm}$.

- Calculer la fréquence de l'onde.
- Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
- Calculer la valeur numérique de la constante k .
- Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
- Exprimer E_y en fonction de E_x .
- Calculer les champ magnétique \vec{B} de cette onde.
- Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
- Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle.

Exercice 14 - Polarisation d'ondes :

- On considère une OPPM monochromatique de pulsation ω dont les composantes complexes sont données par

$$\vec{E} = E_0 (\vec{e}_y + j\alpha \vec{e}_z) \exp[j(\omega t - kx)]$$

avec α un réel.

- Quelle condition doit vérifier α pour que l'onde soit polarisée rectilignement ?
 - Et circulairement ?
- On considère une onde polarisée circulairement dont l'expression est

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y + E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z.$$

- Préciser le sens de polarisation de cette onde.

- (b) Donner l'expression de son amplitude complexe \underline{E} .
- (c) Quelle serait l'expression du champ \vec{E}' polarisé circulairement en sens inverse ayant la même amplitude ? Quelle serait l'expression de son amplitude complexe ?

Exercice 15 - Onde plane associée à un faisceau laser : Un faisceau laser de longueur d'onde λ émet une onde plane monochromatique polarisée rectilignement qui se propage dans le plan (Oxy) et faisant un angle $\alpha = \pi/3$ avec l'axe (Ox) . Le faisceau est polarisé rectilignement suivant (Oz) .

1. Déterminer le vecteur d'onde, le champ électromagnétique, ainsi que le vecteur de Poynting associés à ce faisceau. On notera E_0 l'amplitude du champ électrique.
2. Calculer leur norme dans le cas d'un laser à Argon ($\lambda = 488 \text{ nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de section 1 mm^2 et de puissance moyenne 1 W .

Exercice 16 - Impulsion du champ électromagnétique : On considère une onde plane, progressive harmonique se propageant suivant (Oz) , dont le champ électrique a la forme suivante :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x.$$

1. Quelle est la polarisation de cette onde ?
2. Exprimer le champ magnétique \vec{B} associé.
3. Retrouver la relation de dispersion. On prendra $k > 0$ pour la suite.
4. Quel est le sens de propagation de l'onde ?
5. Calculer la valeur moyenne $\langle w \rangle$ de la densité d'énergie électromagnétique véhiculée par cette onde.
6. La grandeur $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ est appelée impulsion volumique du champ électromagnétique. Quelle est sa dimension ?
7. La modélisation quantique du champ électromagnétique fait appel à la notion de photon, particule élémentaire de masse nulle dont l'énergie et la quantité de mouvement sont directement reliées aux propriétés de l'onde qu'il compose :

$$\mathcal{E}_{photon} = \hbar\omega \text{ et } p_{photon} = \frac{\mathcal{E}_{photon}}{c}.$$

- (a) Retrouver ces deux expressions à partir de la relation de De Broglie $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ et de l'expression relativiste de l'énergie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.
- (b) Quelle densité particulaire n de photons peut être associée à cette onde ?
- (c) En déduire la valeur de l'impulsion volumique de l'onde, et comparer à \vec{P} . Commenter.

Exercice 17 - Pression de radiation : aspect corpusculaire : L'énergie \mathcal{E} et la quantité de mouvement \vec{p} d'un photon sont données respectivement par $\mathcal{E} = h\nu$ et $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé dans le sens de propagation. On considère une interface vide/metal où un flux unidimensionnel constitué de n photons par unité de volume est dirigé vers un miroir métallique. On note E_0 l'amplitude du champ électrique.

1. À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, calculer la force exercée par le flux de photons sur la surface S du miroir, et en déduire la pression.
2. En notant \vec{p} la quantité de mouvement contenue dans le champ, on a la relation $\vec{p} = \vec{\Pi}/c^2$ avec $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting. Interpréter le résultat précédent.
3. Interpréter le résultat obtenu.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>13 - 1. $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$; 3. $1.05 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$; 4. $2x + 2y + z = \text{Cte}$; 5. $E_y = -E_x$; 6 $\vec{B} = \frac{E_x}{3c} (\vec{e}_x + \vec{e}_y - 4\vec{e}_z)$.</p> <p>14 - 1. a. $\alpha = 0$; b. $\alpha = \pm 1$; 2. $\underline{E} =$</p>	<p>$E_0(\vec{e}_y - j\vec{e}_z)$ et $\underline{E}' = E_0(\vec{e}_y + j\vec{e}_z)$.</p> <p>15 - 1. $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \right)$ et $\vec{\Pi} =$ $\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct - x/2 - y\sqrt{3}/2) \right] \frac{\vec{k}}{\ \vec{k}\ }$; 2. $E_0 = 2.8 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $B = \ \vec{B}\ =$</p>	<p>$E_0/c = 9.2 \times 10^{-5} \text{ T}$.</p> <p>16 - 6. $ML^{-2}T^{-1}$; 7. $n = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2\hbar\omega}$ et $\vec{p} = \vec{\Pi}/c^2$.</p> <p>17 - 3. $\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = n\hbar\omega$.</p>
--	--	---

5 Propagation du champ électromagnétique dans les milieux

Exercice 18 - Onde progressive non plane : On s'intéresse à une solution de l'équation de d'Alembert de la forme :

$$X(x, y, z, t) = \mathcal{A} \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos(\omega t - kx).$$

1. Montrer qu'il existe une relation entre k , c , a et ω .
2. Montrer que cette onde ne pourra se propager que si $\omega > \omega_0$. Déterminer ω_0 .

Exercice 19 - Ondes longitudinales dans les plasmas : Un plasma d'hydrogène est un gaz totalement ionisé constitué de protons de charge e et de masse m_p , et d'électrons de charge $-e$ et de masse $m_e \ll m_p$. Au repos, les densités d'électrons et de protons sont égales à n_0 . On s'intéresse à la propagation d'ondes planes se propageant suivant \vec{e}_x , de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1(x, t)\vec{e}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_1(x, t).$$

Cette onde met en mouvement les charges. Les protons et les électrons acquièrent alors les vitesses $v_{1,p}(x, t)\vec{e}_x$ et $v_{1,e}(x, t)\vec{e}_x$. Leurs densités sont alors modifiées selon $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$ et $n_p = n_0 + n_{1,p}(x, t)$. Toutes les quantités portant l'indice 1 sont de valeur moyenne temporelle nulle, et sont supposées infiniment petites, et de même ordre. On se limitera à un calcul d'ordre un dans la suite.

1. L'onde est qualifiée de plane et longitudinale électrique. Justifier, en montrant en particulier que le champ magnétique est nul.
2. Exprimer la densité volumique de courant \vec{j} en fonction des densités d'électrons, de protons, et de leurs vitesses. En déduire

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0} (v_{1,p} - v_{1,e}).$$

3. La vitesse des électrons (resp. des protons) obéit à l'équation

$$\frac{\partial v_{1,e/p}}{\partial t} = \mp \frac{e}{m_{e/p}} E_1(x, t).$$

En déduire les contributions relatives des électrons et des protons sur la densité de courant.

4. Déduire des questions précédentes la relation de dispersion des ondes. Commenter.
5. Calculer les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique de l'onde. Commenter.

Éléments de réponse : $\left| \quad 18 - 1. \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{4a^2}. \quad \right| \quad \left| \quad 19 - 1. \vec{B} = \vec{0}; 4. \omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} + \frac{n_0 e^2}{m_p \epsilon_0}. \quad \right|$

6 Dipôle rayonnant

Exercice 20 - Diffusion de la lumière par des particules chargées : On rappelle qu'un dipôle placé en O dont le moment dipolaire, dirigé suivant Oz , est décrit par $\vec{p} = p(\omega) \cos(\omega t)\vec{e}_z$ et engendre, en un point M situé à grande distance r de O , un champ de rayonnement dont le vecteur de Poynting a pour expression

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p(\omega)^2 \omega^4 \cos^2(\omega(t - r/c))}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

avec $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$ et θ l'angle entre Oz et \overrightarrow{OM} .

Une onde monochromatique plane, progressive et polarisée rectilignement suivant Oz , arrive dans une région de l'espace où se trouvent des atomes modélisés de la façon suivante : le noyau de la charge $+q$ est supposé fixe en P , le nuage électronique est représenté par une charge ponctuelle N de charge $-q$ et de masse m rappelée vers le noyau par une force du type $-m\omega_0^2 \overrightarrow{PN}$ où ω_0 est une constante. Cette charge N est de plus soumise à une force de frottement que l'on négligera mais dont l'action aboutit à l'amortissement des éventuels régimes transitoires. Dans les suites, les charges N seront appelées « charges liées ». Ceci est le modèle « élastiquement lié ».

Le champ électromagnétique incident est caractérisé par $\vec{E} = E_0 \exp[i(kx - \omega t)]\vec{e}_z$.

On supposera que le milieu est assez « dilué » (atomes assez peu nombreux par unité de volume) pour que l'on puisse considérer que ce champ électromagnétique se propage pratiquement dans le vide.

On supposera dans la suite que $\omega \ll \omega_0$.

1. Quelle est l'expression du champ \vec{B} correspondant ?

- On admet que sous l'action du champ électromagnétique incident, les charges liées se mettent en mouvement avec une vitesse faible devant c et on négligera le ou les termes en v/c . Quel est alors, en régime permanent, le mouvement de ces charges liées ?
- Quelle est la puissance moyenne rayonnée par une charge liée ?
- On admet que E_0 est indépendante de ω , et donc de λ . Estimer numériquement le rapport entre la puissance rayonnée dans le rouge 650 nm et entre la puissance rayonnée dans le bleu 470 nm.

Exercice 21 - Calcul classique de la durée de vie d'une transition atomique : Un électron est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton considéré comme infiniment massif et immobile à l'origine O du repère. On néglige toute correction relativiste.

- Calculer la vitesse v et l'accélération a de l'électron, la période T de son mouvement et l'énergie mécanique \mathcal{E} de ce système en fonction de r , e et m_e . Évaluer ces quantités pour $r = 0.1$ nm, l'approximation non relativiste est-elle justifiée ?

On rappelle la formule de Larmor qui indique la puissance moyenne rayonnée par un dipôle $p(t)$ vaut

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{p}(t)^2 \rangle .$$

- Dans les conditions de la première question, calculer numériquement l'énergie perdue sur un tour $\Delta\mathcal{E}$ et en déduire $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$.
- En déduire que le rayon ne peut pas rester constant et calculer sa variation relative à chaque tour.
- En admettant, comme le montre l'exemple précédent, qu'à chaque révolution, l'orbite de l'électron reste circulaire avec une bonne approximation, déterminer l'équation différentielle vérifiée par r et en déduire sa loi d'évolution.
- En déduire le temps à partir duquel le rayon devient nul. Que pouvez vous en conclure ?

On montre en mécanique classique que les niveau électroniques d'un électron autour d'un noyau d'hydrogène sont donnés par $\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$ avec $\mathcal{E}_0 = 13.6$ eV.

- En utilisant le modèle classique précédent, calculer le temps τ nécessaire pour que l'énergie passe de la valeur \mathcal{E}_2 à la valeur \mathcal{E}_1 . L'expérience montre que le temps de transition vaut $\tau' = 1.3 \times 10^{-9}$ s, conclusion ?

Données : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F · m⁻¹, charge élémentaire $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, masse de l'électron $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31}$ kg.

Éléments de réponse :	2. $\vec{r} \approx \frac{-q\vec{E}}{m\omega_0^2}$; 3. 3.66.	2. 2.53×10^{22} m/s ² et $\mathcal{E} = -1.2 \times 10^{-18}$ J;
20 - 1. $\vec{B} = -(E_0/c) \exp[i(kx - \omega t)] \vec{e}_y$;	21 - 1. $v = 1.6 \times 10^6$ m/s, $a =$	2. $ \Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} = 1.25 \times 10^{-6}$; 3. $ \Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} = \Delta r/r $; 4. $r^3(t) = r_0^3 - e^4 t / (4\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2)$.

7 Champ aux interfaces

Exercice 22 - Coefficients de réflexion et de transmission avec une incidence normale : On considère deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes. Dans la région $z < 0$, l'indice du milieu est n_1 . Dans la région $z > 0$, l'indice du milieu est n_2 . On rappelle qu'on a $n = \frac{ck}{\omega}$ avec k le nombre d'onde. Au point d'incidence I , une partie de l'onde est réfléchi et l'autre partie est transmise. Les champs électriques incident, réfléchi et transmis se mettent respectivement sous la forme : $\vec{E}_i = E_0 \exp[j(\omega t - k_1 z)] \vec{e}_y$, $\vec{E}_r = r E_0 \exp[j(\omega t + k_1 z)] \vec{e}_y$ et $\vec{E}_t = t E_0 \exp[j(\omega t - k_2 z)] \vec{e}_y$. Il n'y a ni charge, ni courants à l'interface.

- Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour le champ électrique en fonction de n_1 et n_2 .
- Calculer les vecteurs de Poynting moyens incidents, réfléchis et transmis. En déduire les coefficients en puissance de réflexion $R = |\langle \Pi_r \rangle| / |\langle \Pi_i \rangle|$ et de transmission $T = |\langle \Pi_t \rangle| / |\langle \Pi_i \rangle|$. Que vaut $R + T$? Comment l'interpréter ?

Exercice 23 - Pression de radiation : Une OPPH, à polarisation rectiligne, se propage dans le vide dans la direction (Ox) , dans le sens des x croissants ($E_0 > 0$) :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur, et donne naissance à une onde réfléchi

$$\vec{E}_r = E_{0,r} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_y.$$

On donne les relations de passage, avec la charge surfacique σ , $\vec{E}_{\text{metal}} - \vec{E}_{\text{vide}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$.

Le champ magnétique vérifie, avec la densité de courant surfacique \vec{j}_s , $\vec{B}_{\text{metal}} - \vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$.

1. Que vaut le champ électromagnétique dans le métal ?
2. Déterminer l'amplitude E_{0r} du champ électrique réfléchi, ainsi que la charge surfacique σ et le courant surfacique \vec{j}_s à la surface du métal.
3. Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting dans le demi-espace $x < 0$.
4. Le champ électromagnétique exerce sur une surface $d\Sigma$ du métal une force élémentaire

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} (\sigma \vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}) d\Sigma.$$

- (a) Justifier qualitativement le facteur $1/2$.
- (b) Déduire que le champ exerce sur le miroir une pression p dont on calculera la valeur moyenne en fonction de la densité d'énergie électromagnétique incidente, puis en fonction de la densité totale d'énergie électromagnétique.
- (c) Calculer la valeur moyenne de p pour un laser de puissance moyenne 5 mW et de section droite 0.1 mm^2 . Commenter.

Exercice 24 - Onde confinée entre deux plans conducteurs : On souhaite étudier le guidage d'une onde électromagnétique à l'aide d'un guide d'ondes métallique simple constitué de deux conducteurs parfaits parallèles placés en $z = 0$ et $z = a$. Une onde EM se propage entre eux, de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(z) \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y.$$

1. Calculer $E(z)$. Montrer que la propagation ne peut se faire que selon des modes indicés par un entier n , et exprimer les vecteurs d'onde k_n pour une pulsation ω fixée. Déterminer la relation de dispersion, ainsi que la pulsation de coupure ω_c .
2. Calculer les vitesses de phase v_φ et de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>22 - 1. $\underline{t} = 2n_1/(n_1 + n_2)$, $\underline{r} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$; 2. $R = \underline{r} ^2$, $T = n_2 \underline{t} ^2/n_1$, $R + T = 1$.</p>	<p>23 - 2. $\vec{j}_s = -2E_0 c \epsilon_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$; 3. $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$; 4. $d\vec{F} = E_0^2 \epsilon_0 \vec{e}_x d\Sigma$, $p = 3.33 \times 10^{-4} \text{ Pa}$.</p>	<p>24 - 1. $k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$; 2. $v_g = \frac{kc^2}{\omega} = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}}$.</p>
--	--	--

8 Pour aller plus loin...

Exercice 25 - Guidage d'une onde électromagnétique par un métal : Une onde EM dont les champs électrique et magnétique sont définis par leurs composantes en coordonnées cartésiennes se propage suivant la direction Oz d'un guide d'onde dont la section droite est un rectangle de largeur a suivant Ox et de longueur b suivant Oy . Le guide enferme de l'air, et ses parois sont parfaitement conductrices.

On rappelle les conditions de passage. On note les champs électromagnétique au niveau de l'interface (\vec{E}_1, \vec{B}_1) le milieu 1 et (\vec{E}_2, \vec{B}_2) le milieu 2. On note $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire orthogonal à l'interface allant du milieu 1 au milieu 2. Les relations de passage indiquent

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}.$$

1. En calculant la puissance dissipée par unité de volume dans un conducteur de conductivité finie γ , justifier pourquoi le champ électrique est nul dans la limite $\gamma \rightarrow \infty$ dans le conducteur.

2. Montrer alors que $\vec{B} = c\vec{t}\vec{e}$. On prendra cette constante nulle. En déduire à l'aide des conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique sur les parois du guide que la composante du champ électrique parallèle à la paroi vérifie $\vec{E}_{//} = 0$ et que la composante du champ magnétique orthogonale à la paroi vérifie $\vec{B}_{\perp} = 0$.
3. On cherche les composantes du champ sous la forme $X_i(\vec{r}, t) = X_i(x, y)e^{i(k_g z - \omega t)}$. Montrer à l'aide des équations de Maxwell que les composantes E_x, E_y, B_x, B_y se déduisent toutes des composantes E_z et B_z en notant

$$\begin{aligned} E_z &= E_m(x, y)e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_z &= B_m(x, y)e^{i(k_g z - \omega t)}, \end{aligned}$$

k_g étant le module du vecteur d'onde de propagation de l'onde guidée. On posera également $k^2 = \omega^2/c^2$.

4. Montrer que les équations de propagation de E_z et B_z s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z &= 0. \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + k_c^2 B_z &= 0. \end{aligned}$$

Donner en particulier la relation entre k, k_g et k_c .

5. On se place maintenant dans le cas d'une onde transverse électrique (TE), pour laquelle la composante longitudinale du champ électrique est nulle.
- (a) Déterminer l'expression de $B_m(x, y)$ en supposant une solution à variables séparées de la forme $B_m(x, y) = f(x)g(y)$. On posera $\frac{d^2 f}{dx^2} = -p^2 f$ et $\frac{d^2 g}{dy^2} = -q^2 g$
- (b) Quelle est la relation entre p^2, q^2 et k_c^2 ?
- (c) Donner la solution générale $B_z(x, y)$.
- (d) Montrer que, dans le cadre d'une onde transverse électrique, les dérivées de f et g sont nulles sur les interfaces.
- (e) Montrer que la solution est de la forme

$$B_z = B_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right) e^{i(k_g x - \omega t)}.$$

(f) Donner k_c en fonction de ℓ, n, a , et b .

6. Un mode est caractérisé par un couple de valeurs ℓ et n .

(a) Donner l'expression des composantes de \vec{E} et \vec{B} .

(b) Montrer que pour que le mode (m, n) puisse se propager, ω doit être supérieure à une valeur ω_c que l'on déterminera.

7. Déterminer le vecteur de Poynting et montrer que seule la composante suivant Oz a une valeur moyenne non nulle.
8. Achever la caractérisation de la propagation dans ce guide d'ondes en calculant la vitesse de phase et la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Commenter.

Exercice 26 - Propagation dans un milieu chiral : Un milieu chiral est un milieu transparent où les ondes circulaires droites (CD) et gauches (CG) ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui se traduit par l'existence de 2 indices de réfraction : pour les ondes CG (resp. CD), l'indice est n_g (resp. n_d).

On envoie dans un milieu chiral une OPPH initialement polarisée rectilignement selon (Oz) et se propageant dans la direction (Ox) , dans le sens des x croissants. On suppose qu'à l'interface entre le vide et le milieu chiral (correspondant au plan $x = 0$) la pulsation de l'onde ne varie pas. On suppose également que dans un milieu transparent, le champ électromagnétique se propage exactement de la même manière que dans le vide, à la condition de remplacer c par c/n , où n est l'indice du milieu.

1. Quelle est l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu d'indice n ? Comment est modifiée la relation de dispersion par rapport au vide ?
2. Montrer qu'une onde polarisée rectilignement peut s'écrire comme la somme de deux ondes polarisées circulairement et de sens contraires (polarisation circulaires gauche et droite, CG et CD).

- Comment s'exprime alors l'onde pénétrant dans le milieu chiral ?
- Quelle est, après la traversée d'une cuve de longueur ℓ , la polarisation de l'onde ? Caractériser le changement observé.

Exercice 27 - Effet Faraday dans un plasma : On s'intéresse ainsi à la propagation d'OPPH polarisées circulairement, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$ dans un plasma localement neutre, comportant n électrons et n ions (supposés fixe, ce qui revient à faire l'approximation (largement vérifiée) $m_{\text{ion}} \gg m_e$.) par unité de volume. On impose un champ magnétique statique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ devant lequel le champ magnétique de l'onde est négligeable.

- Calculer la conductivité complexe γ du plasma en présence du champ magnétique. En accord avec une limite haute fréquence $\omega \gg 1/\tau$, on négligera le terme d'amortissement. Montrer en particulier que cette conductivité se met sous forme d'une matrice. On pourra notamment faire apparaître la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$.
- Montrer que les vecteurs d'onde satisfont à l'équation suivante :

$$k^4 - 2F(\omega, \omega_c, \omega_P)k + F^2(\omega, \omega_c, \omega_P) - G^2(\omega, \omega_c, \omega_P) = 0,$$

avec $\omega_P = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}}$ la pulsation plasma associée aux électrons et :

$$F(\omega, \omega_c, \omega_P) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_P^2}{c^2} \frac{1}{1 - \omega_c^2/\omega^2}$$

$$G(\omega, \omega_c, \omega_P) = \frac{\omega_P^2 \omega_c}{c^2 \omega} \frac{1}{1 - \omega_c^2/\omega^2}.$$

On rappelle que puisque l'onde est une OPPH se propageant suivant (Oz) , le champ électrique n'a pas de composante suivant cet axe.

- On note k_D et k_G les vecteurs d'onde solution de l'équation précédente, et on admet qu'ils sont associés respectivement aux polarisations circulaire droite et gauche. Dans une limite de bas champ $\omega_c \ll \omega$, exprimer $k_D - k_G$ à l'ordre 2 en ω_P/ω :

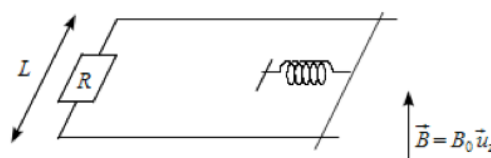
$$k_G - k_D \simeq \frac{\omega_P^2 \omega_c}{\omega^2 c}.$$

- Le plasma est confiné entre les plans $z = 0$ et $z = \ell$. Quelle est la polarisation dans le plan $z = \ell$ d'une onde engendrée par une onde incidente polarisée rectilignement selon \vec{e}_x , dans le plan $z = 0$? Comment s'exprime l'angle α dont a tourné la polarisation en sortie du plasma ?

<p>Éléments de réponse :</p> <p>25 - 4. $k_c^2 = k^2 - k_g^2$; 5. $p^2 + q^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}$; 6. $\omega_c(n, \ell) = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}}$; 8. $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2(n, \ell)}{\omega^2}}$.</p>	<p>26 - 2. $\vec{E} = \frac{E_0}{2} [\sin(\omega t - kx)\vec{e}_y + \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z] + \frac{E_0}{2} [-\sin(\omega t - kx)\vec{e}_y + \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z]$</p>	<p>3. $\vec{E}(\ell, t) = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - \varphi_0) [\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \vec{e}_z - \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \vec{e}_y]$ avec $\Delta\varphi/2 = -(n_D - n_G) \frac{\pi\ell}{\lambda_0}$.</p> <p>27 - 4. $\alpha = \frac{(k_D - k_G)\ell}{2} = \frac{\omega_P^2 \omega_c \ell}{\omega^2 c} \frac{\ell}{2}$.</p>
--	---	--

9 Sujets d'oraux

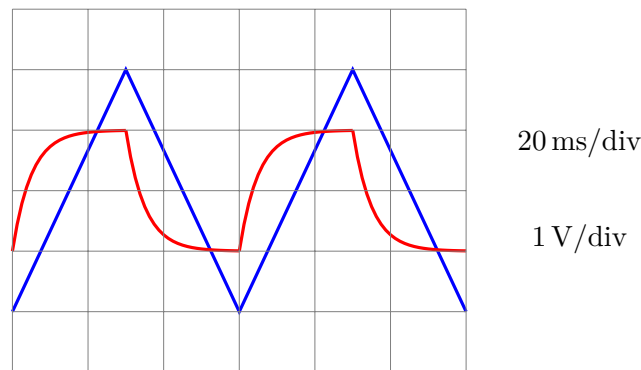
Oral 1 - CCINP - Rail de Laplace accrochés à un ressort : Soit une barre de longueur L et de masse m pouvant glisser sans frottement selon Ox et soumise à une force de rappel de la part d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Elle fait partie d'un circuit électrique de résistance R plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme. À l'équilibre, la barre est en $x = 0$. On néglige les frottements avec l'air.



1. Expliquer quantitativement ce qu'il se passe lorsque l'on tire la lige.
2. Exprimer $i(t)$ en fonction de $\vec{v}(t)$.
3. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position.
4. Quelle est la condition pour obtenir des oscillations ?
5. Faire un bilan d'énergie.

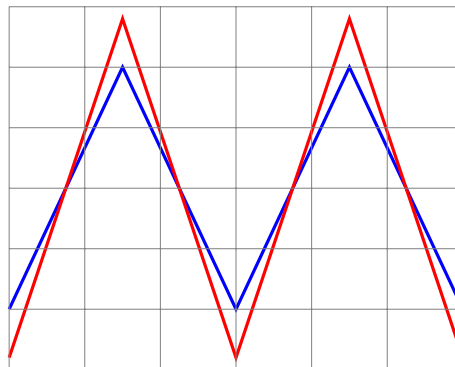
Oral 2 - Centrale - Couplage inductif : On considère deux bobines (1) et (2). La bobine (1) est d'inductance $L_1 = 0.20$ H et de résistance interne r . Elle est branchée en série avec un GBF (de résistance interne négligeable et délivrant une tension triangulaire). L'ensemble forme le circuit (1). La seconde bobine est en circuit ouvert et forme le circuit (2). On note M l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

On branche la voie 1 de l'oscilloscope aux bornes du générateur, la voie 2 aux bornes du circuit (2) et on obtient l'oscillogramme :



1. Déterminer M et r .

On modifie un paramètre et on observe l'oscillogramme suivant :



2. Indiquer quel paramètre du signal d'entrée a été modifié et quelle modification des réglages de l'oscilloscope a été effectué.

Oral 3 - Mines-Ponts - Distribution de courant :

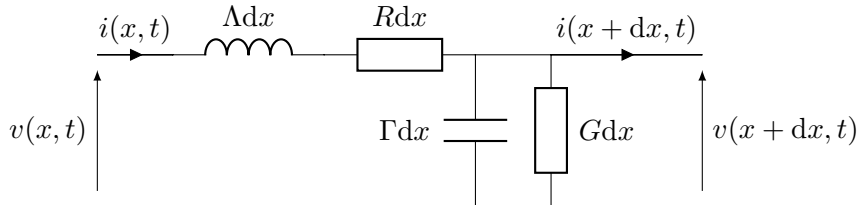
1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de courant \vec{j} dans un conducteur de conductivité γ .
2. On considère un conducteur situé dans le demi-espace $z > 0$. La zone $z < 0$ est vide. Donner l'expression de $\vec{J} = \underline{J}(z)e^{i\omega t}\vec{e}_x$.
3. Donner la puissance moyenne dissipée dans un volume situé en $z > 0$ et de section S orthogonale à \vec{e}_z

Oral 4 - Mines-Ponts - Bilan d'énergie dans un condensateur : On considère un condensateur constitué de plaques circulaires de rayon a . On note C sa capacité. L'intérieur du condensateur est un isolant électrique vide de courants et de charges. Initialement, la charge positive portée par une des armatures vaut Q .

1. Exprimer l'énergie électromagnétique stockée dans le condensateur en fonction de Q et C .

- On suppose maintenant que la charge Q varie en fonction du temps. On suppose que le champ électrique entre les armatures reste uniforme. Comment varie le champ magnétique ? Calculer le vecteur de Poynting.
- En déduire la puissance électromagnétique reçue par le condensateur. L'exprimer en fonction de Q .

Oral 5 - Centrale - Câble coaxial avec pertes (Centrale) : Un câble coaxial est constitué d'un fil central (en haut sur la figure) et d'un enroulement cylindrique tressé (en bas sur la figure). L'espace qui sépare les conducteurs est rempli d'un isolant de matière plastique. Certaines ondes électromagnétiques (le mode TEM) se propagent le long du câble peuvent être modélisées par un modèle électrocinétique à constantes réparties représenté ci-dessous :



où les quatre grandeurs Λ , Γ , R et G sont linéiques ; elles représentent respectivement l'inductance, la capacité, la résistance et la conductance linéiques du tronçon de longueur dx .

- Établir l'équation à laquelle la tension $v(x, t)$ obéit (appelée équation des télégraphistes). La mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (R\Gamma + \Lambda G) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv$$

en précisant l'expression de la célérité c . Que devient l'équation dans le cas $R = 0$ et $G = 0$?

- Chercher des solutions sous la forme des ondes progressives :

$$v(x, t) = v_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

- Exprimer la relation de dispersion. On pourra faire apparaître les facteurs $R + j\Lambda\omega$ et $G + j\Gamma\omega$.
- En écrivant $\underline{k} = k_1 - jk_2$, à quelle(s) condition(s) y a-t-il propagation sans atténuation ou sans dispersion ?
- Dans le cas sans dispersion, calculer la vitesse de phase et la partie imaginaire de \underline{k} . Que dire si l'onde injectée n'est pas monochromatique en entrée ?

Oral 6 - Ulm - Conducteur cylindrique creux : On considère un cylindre creux à symétrie cylindrique de conducteur de conductivité σ . On note R_1 et R_2 les rayons internes et externes. La face interne est portée au potentiel V_1 et la face externe est portée au potentiel V_2 .

Est-ce que ce dispositif permet de mesurer un champ magnétique constant et uniforme ?

<p>Éléments de réponse :</p> <p>1 - 3. $\ddot{x} + \frac{(BL)^2}{mR} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$.</p> <p>2 - 1. $r = 50 \Omega$ et $M = 1.5 \text{ mH}$.</p>	<p>3 - 1. $\vec{\Delta} \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$; 2. $\underline{J}(z) = J_0 e^{\underline{k}z}$ avec $\underline{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 + j \frac{\gamma}{\epsilon_0 c}\right)^{1/2}$.</p> <p>4 - 2. $\vec{\Pi} = -\frac{QI}{2\pi^2 R^3 \epsilon_0} \vec{e}_r$; 3. $\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C}\right)$.</p>	<p>5 - 1. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (R\Gamma + \Lambda G) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; 2. a. $\underline{k}^2 = -(R + j\Lambda\omega)(G + j\Gamma\omega)$; c. $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$.</p> <p>6 - Pourquoi ça tournerait ?</p>
---	--	--