

Table des matières

1	Approche ondulatoire de la mécanique quantique	1
2	Partie spatiale de la fonction d'onde dans un potentiel	3
3	Pour aller plus loin...	5
4	Sujets d'oraux	6

1 Approche ondulatoire de la mécanique quantique

Exercice 1 - Ordre de grandeur des longueurs d'ondes de de Broglie :

- Calculer la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = h/(mv)$ associée à...
 - ▷ une personne de 60 kg qui court à une vitesse de $7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;
 - ▷ une balle de tennis de 60 g se déplaçant à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;
 - ▷ une poussière de $1 \mu\text{g}$ se déplaçant à $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - ▷ un neutron « thermique », c'est-à-dire dont l'énergie cinétique est égale à l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique à température ambiante (300 K) ;
 - ▷ un neutron refroidi à $1 \mu\text{K}$, appelé neutron « ultra-froid » (température atteignable avec des techniques de refroidissement laser) ;
 - ▷ un électron se déplaçant au dixième de la vitesse de la lumière, sans tenir compte d'effets relativistes.
- Commenter ces valeurs, en particulier leur évolution d'une particule à l'autre et leur position par rapport à des tailles connues (taille d'un noyau atomique, d'une structure moléculaire, d'une ouverture micro-métrique...). En déduire les particules qui pourront donner lieu à d'éventuels phénomènes de diffraction.

Données : Constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Énergie cinétique d'agitation thermique d'une particule microscopique $\mathcal{E}_c = 3k_B T/2$

Constante de Planck $h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Masse du neutron $m_n \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Masse d'un électron $m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Exercice 2 - Particule libre et paquet d'ondes : On considère une particule libre placée dans un potentiel nul.

- Déterminer les fonctions d'onde $\Psi(x, t) = \Phi(x)f(t)$ représentant des états dynamiques pour lesquels l'énergie a la valeur \mathcal{E} .
- Quelles sont les valeurs possibles de l'énergie ?

On étudie par la suite la fonction d'onde $\Psi(x, t) = A \exp(i(k_0 x - \omega_0 t))$.

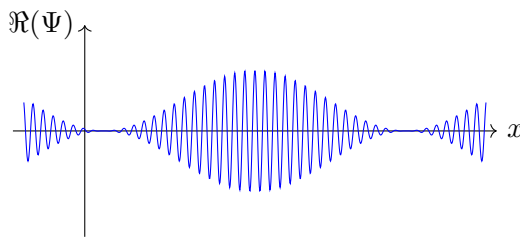
- Pourquoi cette onde ne peut pas décrire la particule ?

Pour résoudre la difficulté, on envisage un paquet d'onde qui est la superposition d'ondes planes sinusoïdales de pulsations voisines de ω_0 et de vecteurs d'ondes voisins de k_0 . On suppose que $\Delta\omega \ll \omega_0$ et $\Delta k \ll k_0$. Pour simplifier l'étude, on considère la superposition de trois ondes planes :

$$\Psi(x, t) = \frac{A}{2} [2 \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) + \exp(i((k_0 + \Delta k)x - (\omega_0 + \Delta\omega)t)) + \exp(i((k_0 - \Delta k)x - (\omega_0 - \Delta\omega)t))] .$$

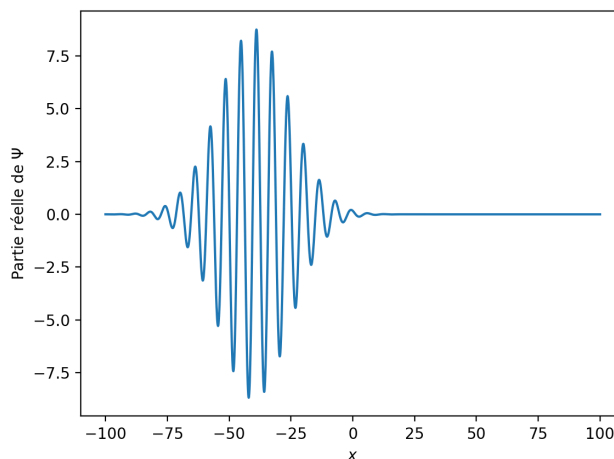
On représente ci-après le graphe représentant la partie réelle de la fonction d'onde en fonction de x à $t = 0$. La fonction d'onde est alors une exponentielle complexe modulée par une enveloppe lentement variable

4. Déterminer la largeur Δx des « bouffées d'ondes », soit la longueur entre deux annulations de l'enveloppe, en fonction de Δk . Montrer que $\Delta k \Delta x = 2\pi$ et que cela est compatible avec l'inégalité de Heisenberg spatiale.



La figure ci-contre représente la partie réelle de la fonction d'onde d'un paquet d'onde gaussien à $t = 0$ en fonction de l'abscisse. On admet que la partie imaginaire a une forme similaire. Ce paquet d'ondes est la superposition d'une infinité d'onde planes de pulsations voisines de ω_0 et de vecteurs d'onde voisins de k_0 .

5. Est-ce que la condition de normalisation peut être résolue ?
 6. Déterminer la vitesse de la particule. Le milieu est-il dispersif ? Le paquet d'onde se propage dans le sens des $x > 0$. Est-ce qu'il se déforme en cours du temps ?



Exercice 3 - Temps d'évolution d'une poussière interstellaire : Soit une particule de poussière interstellaire est modélisée par une particule libre de masse $m = 10^{-15}$ kg de taille caractéristique $\ell = 1 \mu\text{m}$ supposée correspondre à la largeur caractéristique d'un paquet d'ondes de matière.

1. Montrer que l'équation de Schrödinger donne, en ordre de grandeur le temps caractéristique d'étalement du paquet d'onde $\tau = \frac{2m\ell^2}{\hbar}$.
 2. Calculer numériquement ce temps et conclure.

Exercice 4 - Étude d'un paquet d'onde à spectre plat : On s'intéresse à une particule libre qui se déplace suivant l'axe Ox croissant. On va supposer que plusieurs quantité de mouvement existent autour de p_0 , à $\Delta p \ll p_0$ près, et on construit le paquet d'onde suivant

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - \mathcal{E}(p)t)\right) dp$$

On suppose que $A(k)$ vaut A_0 si $p \in [p_0 - \Delta p/2, p_0 + \Delta p/2]$ et 0 sinon.

1. Exprimer \mathcal{E} au premier ordre en $\delta p = p - p_0$.
 2. Montrer que le petit paquet d'onde peut s'écrire

$$\Psi(x, t) = A_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left[p_0 x - \frac{p_0^2 t}{2m}\right]\right) \int_{p_0 - \Delta p/2}^{p_0 + \Delta p/2} \exp\left(\frac{i u}{\hbar}\left(x - \frac{p_0 t}{m}\right)\right) du .$$

3. Calculer la fonction d'onde et donner son module.
 4. Où se trouve le maximum de la densité de probabilité à la date t ? Interpréter sa dépendance en t .
 5. Évaluer qualitativement la largeur Δx de la densité de probabilité. Est-ce compatible avec l'inégalité de Heisenberg ?

Exercice 5 - Particule libre à 3 dimensions : On considère une particule libre de se déplacer dans les 3 directions de l'espace. La fonction d'onde Ψ dépend donc de x, y, z et t .

1. On cherche une solution stationnaire sous la forme $\Psi(t, \vec{r}) = \chi(t)\Phi(x, y, z)$. Donner l'expression de χ .

2. On suppose que $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)\Phi_z(z)$. Montrer que

$$-\frac{d^2\Phi_x}{dx^2} = k_x^2\Phi_x$$

et donner des expressions similaires pour y et z .

3. En déduire la relation entre $|\vec{k}|^2$ et \mathcal{E} .

4. On cherche une solution au problème sous forme d'une onde plane $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$, retrouver le résultat précédent.

Exercice 6 - Démonstration de la relation de Heisenberg : Considérons une particule quantique décrite par une fonction d'onde Ψ telle que $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p_x \rangle = 0$. On rappelle que Δx et Δp correspondent aux incertitudes-types des observables x et p_x pondérées par la distribution de probabilité.

1. Par définition, $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle$. Donner sa définition intégrale.

2. On admet que l'observable p_x appliquée à Ψ vérifie $p_x\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x}$. En déduire la définition intégrale de $\Delta p_x^2 = \langle p_x^2 \rangle$.

3. Montrer que

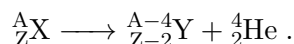
$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x\Psi + \lambda\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right|^2 dx = \Delta x^2 - \lambda\hbar + \lambda^2\Delta p_x^2.$$

4. En utilisant le fait que $I(\lambda)$ est un trinôme du second degré en λ , toujours positif ou nul, en déduire l'inégalité de Heisenberg spatiale.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>1 - 1. 5.7×10^{-36} m; 4.0×10^{-34} m; 6.6×10^{-22} m; 1.5×10^{-10} m; 2.5×10^{-6} m; 2.4×10^{-11} m.</p>	<p>2 - $4\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}$.</p> <p>3 - 2.2×10^7 s.</p> <p>4 - 1. $\mathcal{E} = p_0^2/(2m) + p_0\delta p/m$; 3. $\Psi(x, t) =$</p>	<p>$C \text{sinc} \left[\frac{\Delta p}{2\hbar} \left(x - \frac{p_0}{m} t \right) \right]$.</p> <p>5 - 1. $\Phi(\vec{r}) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E} t \right)$; 3. $\vec{k} ^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$.</p>
--	---	--

2 Partie spatiale de la fonction d'onde dans un potentiel

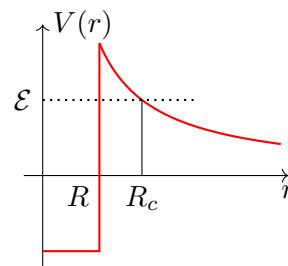
Exercice 7 - Numérique - Radioactivité alpha : La radioactivité α est l'émission par un noyau A_ZX d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$ ou particule α . La réaction nucléaire correspondante s'écrit



Dans une théorie élémentaire de la radioactivité α proposée par Gamow en 1928, on considère que la particule α préexiste dans le noyau X, considéré comme résultant de la réunion du noyau Y et de la particule α .

La loi d'interaction entre ces deux particules est définie par leur énergie potentielle $V(r)$ représentée en fonction de leur distance r :

- ▷ si r est supérieur à une limite $R = r_0A^{1/3}$ (pratiquement égal au rayon du noyau Y car la particule α est quasi-ponctuelle), l'énergie potentielle V est due à la seule répulsion électrostatique entre les $Z - 2$ protons de Y et les 2 protons de He : $V(r) = \frac{2(Z - 2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$;
- ▷ pour $r < R$, les interactions nucléaires attractives interviennent, que l'on schématise par un puits de potentiel très profond.



On donne $r_0 = 1.2 \times 10^{-15}$ m, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ F/m, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C et $m_p \approx m_n = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.

On considère un atome X de radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ et une particule α d'énergie $\mathcal{E} = 4.78$ MeV.

1. Calculer R et R_c .
2. Expliquer pourquoi l'émission α ne peut se faire que par effet tunnel.

Dans le modèle proposé par Gamow, le coefficient de transmission peut se mettre sous forme approché

$$\ln T \approx -2 \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2m_\alpha(V(r) - \mathcal{E})}{\hbar^2}} dr.$$

3. Montrer numériquement que l'on peut supposer

$$\ln T \approx -\frac{314}{\sqrt{\mathcal{E}}} + 74.8$$

avec \mathcal{E} en MeV.

On considère que la particule α de vitesse v rebondit un certain nombre de fois sur la paroi. À chaque collision avec la paroi située en $r = R$, la probabilité pour que la particule franchisse la barrière est T . On appelle t_0 le temps mis entre deux collisions.

- Calculer t_0 et $\tau = t_0/T$ le temps de vie de la particule α dans le puits de potentiel. Donner l'application numérique.
- L'énergie \mathcal{E} des particules α peut varier entre 4 et 9 MeV pour les différents émetteurs α . Montrer avec le modèle précédent que t_0 est presque le même pour tous les émetteurs α . En déduire une formule approchée numérique de $\ln \tau$ en fonction de \mathcal{E} exprimé en MeV.

Exercice 8 - Superposition de fonctions d'onde : Une particule qui se déplace sur un axe Ox est soumise à un potentiel V tel que $V = 0$ pour $0 < x < a$ et $V = +\infty$ pour $x < 0$ et $x > a$. Les fonctions d'onde normées des états stationnaires peuvent se mettre sous la forme

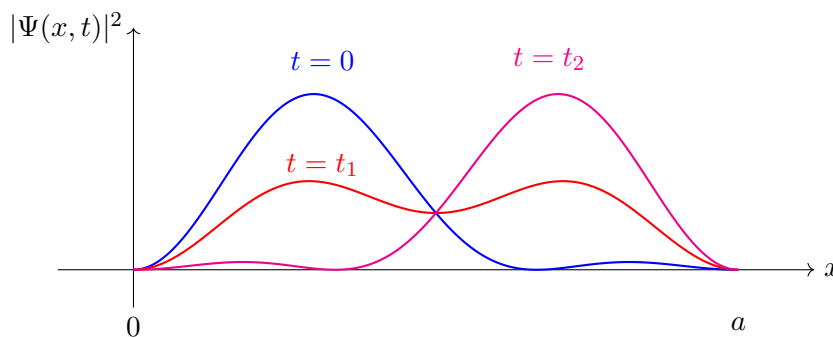
$$\Psi_n(x, t) = \Phi_n(x) \exp\left(-i\frac{\mathcal{E}_n t}{\hbar}\right) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) \exp\left(-i\frac{\mathcal{E}_n t}{\hbar}\right).$$

On place le système à $t = 0$ dans l'état représenté par

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1(x) + \Phi_2(x)].$$

- Donner l'expression de $\Psi(x, t)$. On posera $\omega = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/\hbar$.
- Établir l'expression de la densité linéique de probabilité $|\Psi(x, t)|^2$.

On donne les graphes représentant cette densité linéique de présence en fonction de x à $t = 0$, $t = t_1 = \pi/(2\omega)$ et $t = t_2 = \pi/\omega$.

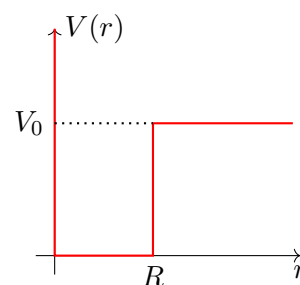


- Interpréter les graphes. Que se passe-t-il pour $t > \pi/\omega$?
- La valeur moyenne de x à l'instant t peut s'écrire sous la forme $\langle x \rangle = \int_0^a x |\Psi|^2 dx$. En déduire une estimation de l'intervalle de temps Δt au bout duquel le système a évolué de façon appréciable.

Exercice 9 - Puits semi-infini :

Pour modéliser de la force nucléaire entre un proton et un neutron, notamment dans le cadre d'une des réactions de la nucléosynthèse primordiale où un neutron et un proton fusionnent pour donner un noyau de deutérium, on utilise le modèle du puits semi-infini. La loi d'interaction est définie par leur énergie potentielle $V(r)$ représentée en fonction de leur distance r :

- ▷ si r est supérieur à une limite R , le potentiel est V_0 une constante ;
- ▷ si r est négatif, le potentiel est infini ;
- ▷ sinon, le potentiel est nul.



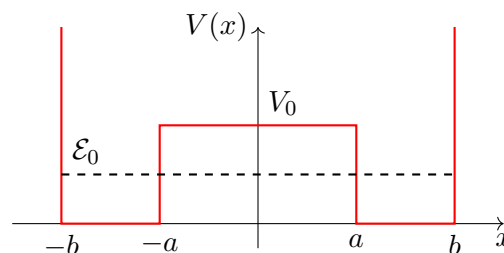
On étudie une particule stationnaire confinée dans le puits, soit $\mathcal{E} < V_0$.

1. Donner l'expression de la partie temporelle de la fonction d'onde.
2. En utilisant la condition à la limite en $r = 0$, donner l'expression de la fonction d'onde entre 0 et R .
3. En utilisant la condition de normalisation, donner l'expression de la fonction d'onde pour $r > R$.
4. En utilisant les relations de continuité, montrer qu'il faut résoudre l'équation $K = -k \cot(kR)$ où on définira chacun des termes.
5. On pose $u = \sqrt{2mV_0} \frac{R}{\hbar}$. Montrer graphiquement que le nombre de valeurs possibles pour l'énergie est fini.
6. Donner les valeurs possibles de $x = kR$ pour $u = 10$.

Exercice 10 - Étude quantitative de la molécule d'ammoniac : On étudie l'un des nombreux degrés de liberté de la molécule d'ammoniac NH_3 . L'atome d'azote a la possibilité de se déplacer par rapport au plan des atomes d'hydrogène, sur l'axe du triangle équilatéral et en particulier d'osciller d'un côté à l'autre. Au cours d'un mouvement de ce type, le centre de masse reste fixe et le triangle des atomes d'hydrogène se déforme en se déplaçant en même temps que l'atome d'azote.

On modélise ce problème par le mouvement d'une particule dans un ensemble de deux puits de potentiel à une dimension, correspondant aux deux états d'équilibre possibles de la molécule, et séparés par une barrière de potentiel. On a donc un potentiel infini si $x > |b|$, V_0 si $|x| < a$ et un potentiel nul sinon.

On donne $\hbar = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ et on considère une particule d'énergie $0 < \mathcal{E}_0 < V_0$.



1. Justifier, à partir des symétries du potentiel, que les solutions de l'équation de Schrödinger sont soit paires (symétriques), soit impaires (anti-symétriques).
2. Donner les expressions de la partie spatiale de la fonction d'onde les différentes zones.

Dans les puits gauche (resp. droit), on note la fonction d'onde sous la forme $\Phi_g(x) = \alpha_g \sin(kx + \varphi_g)$ (resp. $\Phi_d(x) = \alpha_d \sin(kx + \varphi_d)$).

1. Donner l'expression de k .
2. Quelle est la valeur de φ pour respecter les conditions aux limites en $x = \pm b$. Quelle sont les relations entre α_g et α_d dans les cas des solutions paires et impaires.
3. On se restreint à l'étude d'une solution paire, montrer que les contraintes conduisent à

$$k \coth(Ka) = -K \tan[k(b - a)]$$

avec k et K à déterminer.

4. On se restreint à l'étude d'une solution impaire, montrer que les contraintes conduisent à

$$k \tanh(Ka) = -K \tan[k(b - a)]$$

avec k et K à déterminer.

5. Dans le cas d'une barrière infinie $V_0 = +\infty$, que peut-on dire de l'énergie des niveaux symétriques et anti-symétriques? Quelles sont les valeurs du nombre d'onde k ? Représenter les états possibles pour l'énergie minimale.
6. Prenons maintenant $V_0 \gg \mathcal{E}$ mais non infini. Montrer graphiquement que les états de même énergie de la barrière infini se séparent en états d'énergie distincte.

Éléments de réponse :

7 - 1. $R = 7.31 \times 10^{-15} \text{ m}$ et $R_c = 51.8 \times 10^{-15} \text{ m}$; 4. $t_0 = 9.7 \times 10^{-22} \text{ s}$ et $\tau = 1.7 \times 10^{14} \text{ s}$.

8 - 2. $\frac{1}{2} [\Phi_1(x)^2 + \Phi_2(x)^2 + 2\Phi_1(x)\Phi_2(x) \cos(\omega t)]$; 4. $\langle x \rangle = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2} \cos(\omega t)$
9 - 2. $C \sin(kr)$; 3. $D \exp(-Kr)$; 6. 5 so-

lutions.

10 - 3. $k = \sqrt{2m\mathcal{E}}/\hbar$; 4. $\varphi_d = -kb$, $\varphi_g = +kb$; pair : $\alpha_d = -\alpha_g$ et impair $\alpha_d = \alpha_g$.

3 Pour aller plus loin...

Exercice 11 - Confinement d'un gaz d'électron dans un métal : Considérons un électron confiné dans un métal, représenté par une boîte cubique de volume L^3 . Le potentiel de confinement est nul si

$(x, y, z) \in [0, L]^3$ et infini sinon. Le potentiel s'écrit $V(x, y, z) = V_0(x) + V_0(y) + V_0(z)$ avec V_0 le potentiel à une dimension.

On s'intéresse à la partie spatiale de la fonction d'onde $\Phi(x, y, z)$. Par symétrie, on celle-ci peut s'écrire sous la forme $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)\Phi_z(z)$. On note \mathcal{E} l'énergie totale de l'état.

1. Montrer que les fonctions Φ_i vérifient une équation différentielle de la forme $-\frac{\hbar^2}{2m}\Phi_i'' + V_0(x_i)\Phi_i = \mathcal{E}_i\Phi_i$.
2. Résoudre ces équations différentielles. Montrer que l'énergie totale dépend de trois nombres entiers positifs.
3. On souhaite dénombrer le nombre de configurations possibles d'énergie inférieure à \mathcal{E} . Montrer que ce nombre $N(E)$ correspond au volume d'un huitième d'une certaine sphère que l'on précisera.

Il faut en réalité multiplier la valeur précédente par 2 pour tenir compte du spin des électrons.

L'énergie du gaz d'électrons dans le métal est appelée énergie de Fermi \mathcal{E}_F . Elle correspond à l'énergie du dernier niveau rempli.

4. Pour l'or, il y a $n = 5.9 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ électrons disponibles par unité de volume. En déduire l'énergie de Fermi correspondante.

Données : masse de l'électron $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ - constante de Planck $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Exercice 12 - Étude de l'oscillateur harmonique : L'étude de l'oscillateur harmonique est un problème majeur en physique. En effet, on montre qu'autour de toute position d'équilibre stable, le potentiel peut, au moins au second ordre, être assimilé à une fonction quadratique en la position.

Considérons donc un potentiel $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ avec m la masse de la particule et, par analogie avec la mécanique classique, ω la pulsation d'oscillation autour de l'équilibre.

1. Montrer que, par un changement de variable, l'équation de Schrödinger spatiale peut se réduire à une équation adimensionnée

$$\frac{d^2\Phi}{d\tilde{x}^2} + (\varepsilon - \tilde{x}^2)\Phi = 0$$

où on donnera la définition de ε et entre \tilde{x} et x .

2. Montrer que $\Phi_0(\tilde{x}) = C_0 \exp(-\tilde{x}^2/2)$ est une solution de cette équation. C est une constante de normalisation que l'on ne cherchera pas à déterminer. Donner l'énergie correspondant à cette solution.
3. On cherche les autres solutions de cette équation sous la forme $\Phi(\tilde{x}) = CH(\tilde{x}) \exp(-\tilde{x}^2/2) = \alpha H(\tilde{x})\Phi_0(\tilde{x})$ avec H une fonction polynomiale et α la constante de normalisation. Donner l'équation différentielle vérifiée par H .
4. La famille de polynôme vérifiant cette équation est appelée polynôme de Hermite, construire les polynômes de degré 0, 1 et 2 correspondants et tracer numériquement les fonctions d'ondes correspondantes (on prendra le coefficient devant le monôme de plus haut degré égal à 1). Donner l'énergie des états décrits par les polynômes de degré 1 et 2.

On cherche les relations entre les coefficients du polynôme, on pose donc H_n le polynôme de degré n que l'on écrit $H_n(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^n a_i \tilde{x}^i$ où $a_n = 1$.

5. Justifier que, au vu de la symétrie du potentiel, les polynômes sont soit pairs, soit impairs. En déduire que la moitié des coefficients a_i sont nuls.
6. En utilisant l'équation différentielle vérifiée par les polynômes, donner la relation de récurrence entre les coefficients a_{2i} et a_{2i-2} .
7. En utilisant le fait que H_n est un polynôme d'ordre n , en déduire que $\varepsilon_n = 2n + 1$. En déduire les niveaux d'énergies accessibles d'une particule confinée par un puits de potentiel harmonique.

<p>Éléments de réponse :</p>	<p>avec $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$; 3. $N(E) = L^3(2m\mathcal{E})^{3/2}/(6\pi^2\hbar^3)$; 4. $\mathcal{E}_F = 5.54 \text{ eV}$.</p>	<p>$\mathcal{E} = \hbar\omega/2$; 3. $H'' - 2\tilde{x}H' + (\varepsilon - 1)H = 0$;</p> <p>4. $H_1 = \tilde{x}$, $\mathcal{E}_1 = 3\hbar\omega/2$ et $H_2 = \tilde{x}^2 - 1/2$, $\mathcal{E}_2 = 5\hbar\omega/2$; 6. $a_{k+2} = (2k + 1 - \varepsilon)/[(k + 1)(k + 2)]a_k$; 7. $\mathcal{E}_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.</p>
<p>11 - 2. $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$</p>	<p>12 - 1. $\tilde{x} = \sqrt{m\omega/\hbar}x$ et $\varepsilon = 2\mathcal{E}/(\hbar\omega)$; 2.</p>	

4 Sujets d'oraux

Oral 1 - CCINP - Étude d'un électron confiné dans un cube entouré d'ions : On considère une cube de côté a avec un ion chargé positivement à chaque coin.

1. Rappeler l'expression de l'énergie d'interaction entre deux particules chargées q_1 et q_2 . Quelle est alors l'énergie d'interaction entre un cation de charge $+Ze$ et un électron ? Expliquer pourquoi on peut dire que le potentiel est infini en dehors du cube.

Dans la suite, on suppose que le potentiel peut se réécrire $V(x, y, z) = V_0(x)V_0(y)V_0(z)$ avec $V_0(x) = 0$ si $x \in [0, a]$ et est infini sinon.

On rappelle que la particule confinée vérifie l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Phi(x) = \mathcal{E}\Phi(x).$$

2. En se plaçant en unidimensionnel, montrer que l'énergie de la particule est quantifiée.

On suppose que

$$\Psi(M, t) = \Phi_n(x)\Phi_m(y)\Phi_p(z) \exp\left[-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t\right]$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n,x} + \mathcal{E}_{m,y} + \mathcal{E}_{p,z}$.

3. Que vaut l'énergie dans l'état fondamental ? Et dans un état excité ?
4. Le *degré de dégénérescence* $n(\mathcal{E})$ correspond au nombre d'états quantiques distincts ayant le même niveau d'énergie \mathcal{E} . Que vaut-il ?

Oral 2 - Centrale - Potentiel en Dirac : Le potentiel étudié, supposé borné, est donné par $V(x) = \delta(x)V_0$ avec δ la distribution de Dirac définie par $\int_{0^-}^{0^+} f(x)\delta(x) = f(0)$. La marche de potentielle est donc considérée comme infiniment fine.

On considère une particule incidente venant de $-\infty$.

Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>1 - 3. $\mathcal{E} = (n^2 + m^2 + p^2) \frac{\hbar^2}{8ma^2}$; 4.</p>	$n(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{8ma^2\mathcal{E}}{\hbar^2}}.$	<p>2 - Réflexion : $\frac{mV_0}{\hbar^2 ik - mV_0}$; transmission :</p> $\frac{\hbar^2 ik}{\hbar^2 ik - mV_0}.$
--	---	---
