TD Transferts thermiques

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI*- 2025-2026

Table des matières

1 Révisions de première année : principes de la thermodynamique

On rappelle les expressions suivantes de l'entropie :

- Pour une phase condensée de capacité calorifique C (en J/K), et avec $S(T_{\text{ref}})$ est une entropie de référence à la température T_{ref}, $S(T) = S(T_{\text{ref}}) + C \ln \dfrac{T}{T_{\text{ref}}}$;

- Pour un gaz parfait de n moles et de cœfficient de compressibilité adiabatique γ, avec $s(T_{\text{ref}})$ est une entropie molaire de référence, les expressions suivantes sont équivalentes

$$S(T,V) = ns(T_{\text{ref}}, V_{\text{ref}}) + \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{T}{T_{\text{ref}}} + nR\ln\frac{V}{V_{\text{ref}}} \ ;$$
$$S(p,V) = ns(p_{\text{ref}}, V_{\text{ref}}) + \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{p}{p_{\text{ref}}} + \frac{\gamma nR}{\gamma-1}\ln\frac{V}{V_{\text{ref}}} \ ;$$
$$S(T,p) = ns(T_{\text{ref}}, p_{\text{ref}}) + \frac{\gamma nR}{\gamma-1}\ln\frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR\ln\frac{p}{p_{\text{ref}}} \ .$$

Exercice 1 - Compression d'un gaz parfait : Un gaz parfait diatomique est enfermé dans un cylindre de volume $V_1 = 5\,\text{L}$ à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable. À l'extérieur du piston, la température est $T_{\text{ext}} = 293\,\text{K}$, la pression est $p_{\text{ext}} = 1$ atm. La paroi du cylindre est parfaitement diatherme, c'est-à-dire qu'à l'équilibre, la température du gaz est toujours $T_{\text{ext}} = 293\,\text{K}$. On rappelle que 1 atm $= 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$.

1. En appuyant sur le piston, on augmente très lentement la pression de $p_1 = p_{\text{atm}}$ jusqu'à $p_2 = 10$ atm.
   (a) Quelles hypothèses peut-on faire sur la nature de la transformation 1 vers 2 du gaz ?
   (b) En déduire T_2, V_2, ΔU, Q et W. Faire l'application numérique.
2. On applique maintenant instantanément la pression P_2 au piston puis on attend l'équilibre qui interviendra forcément après quelques oscillations du piston si on considère la viscosité du gaz, les frottements au niveau de la paroi puis les échanges thermiques au niveau de la paroi.
   (a) Quelles hypothèses peut-on faire sur la nature de la transformation 1 vers 2' du gaz ?
   (b) En déduire T_2', V_2', $\Delta U'$, Q' et W'. Faire l'application numérique.

Exercice 2 - Détente réversible d'un gaz parfait au contact d'un mélange eau-glace : Un cylindre non calorifugé, fermé par un piston, contient une mole de gaz parfait dans l'état initial ($T_1 = 273\,\text{K}$, $p_1 = 3\,\text{bar}$). Ce système est plongé dans un bain eau-glace constituant un thermostat à $0\,°\text{C}$. On agit sur le piston mobile pour détendre, de façon réversible le gaz jusqu'à la pression $p_2 = 1\,\text{bar}$.

1. Déterminer la masse m de glace apparaissant dans le thermostat, l'enthalpie massique de fusion de la glace étant $L_{\text{fus}} = 334\,\text{J}\cdot\text{g}^{-1}$.
2. Calculer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée par le gaz ainsi que la création d'entropie.

Exercice 3 - Étude d'un moteur de Stirling : Un cycle de Stirling est formé de deux isothermes ($T_1 < T_2$) et de deux isochores ($V_1 < V_2$) alternées. Le cycle est décrit de façon à ce que l'équilibre thermodynamique soit réalisé en chaque instant dans le sens moteur par n moles de gaz parfait caractérisé par le coefficient γ supposé constant.

1. Représenter ce cycle dans le diagramme de Clapeyron.
2. En fonction des températures T_1 et T_2, du taux de compression $a = \dfrac{V_2}{V_1}$ et de n, R et γ, établir les expressions :
   (a) de la quantité de chaleur reçue par le système au cours d'un cycle (notée Q_2) ;
   (b) de la quantité de chaleur cédée par le système au cours d'un cycle (notée Q_1) ;
   (c) du rendement thermodynamique de ce cycle.
3. On admet que la chaleur fournie au fluide lors du chauffage isochore est récupérée par un régénérateur lors du refroidissement isochore. Que devient le rendement ? Comparer ce rendement à celui de Carnot.

Exercice 4 - Vaporisation d'une masse d'eau : Un cylindre fermé par un piston mobile contient 1 g d'eau liquide à 100 °C sous 1.0 bar. L'ensemble est en contact avec un thermostat à 100 °C. On tire le piston lentement jusqu'à ce que la dernière goutte de liquide soit vaporisée.
1. Représenter l'évolution sur un diagramme de Clapeyron (p,V_{massique}).
2. Calculer le volume final V_1 du cylindre en considérant la vapeur sèche obtenue comme un gaz parfait.
3. Exprimer puis calculer le transfert thermique Q.
4. Exprimer puis calculer la variation d'entropie ΔS de l'eau, l'entropie échangée S_{e} et l'entropie créée S_{c}.

Données : Masse molaire de l'eau : $M = 18\,\text{g/mol}$; Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100 °C : $L_{\text{vap}} = 2.25\times10^3\,\text{kJ/kg}$.

Élements de réponse :

1 - 1. $T_2 = T_{\text{ext}}$, $V_2 = 0.5\,\text{L}$, $W = -Q \approx 1200\,\text{J}$; 2. $W = -Q \approx 4600\,\text{J}$.

3 - 2. $1\to2$:$W_{1\to2} = 0$, $Q_{1\to2} = \Delta U = nR/(\gamma-1)(T_2-T_1)$; $2\to3$: $\Delta U_{2\to3} = 0$, $-Q_{2\to3} = W_{2\to3} = -nRT_2\ln V_2/V_1$; $3\to4$: $W_{3\to4} = 0$, $Q_{3\to4} = \Delta U = nR/(\gamma-1)(T_1-T_2)$; $4\to1$: $\Delta U_{4\to1} = 0$, $-Q_{4\to1} = W_{4\to1} = -nRT_1\ln V_1/V_2$; $Q_2 = -W_{2\to3} + nR/(\gamma-1)(T_2-T_1)$; $Q_1 = -W_{4\to1} + nR/(\gamma-1)(T_1-T_2)$; $W_{\text{f}} = nR(T_2-T_1)\ln a > 0$; $\eta = nR(T_2-T_1)\ln a/(nRT_2\ln a + nR/(\gamma-1)(T_2-T_1))$ 3. $\eta = 1 - T_1/T_2$.

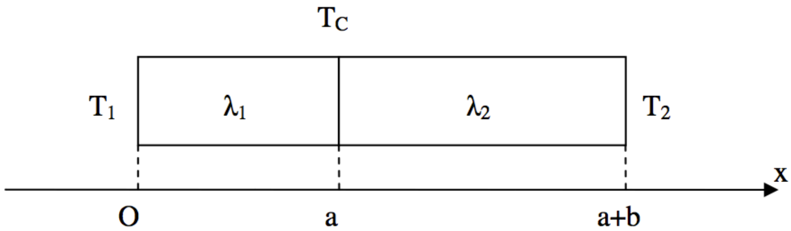
4 - 1. $V_1 = 1.7\,\text{L}$; 3. $Q = 2.25\,\text{kJ}$; 4. $\Delta S = S^{\text{e}} = 6\,\text{J/K}$,$S^{\text{c}} = 0$.

2 Révisions et approfondissements : résistances thermiques

Exercice 5 - Simple et double vitrage : On considère une pièce à la température $T = 20$ °C. La température extérieure est de $T_{\text{e}} = 5$ °C. On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda = 1.15\,\text{W/m/K}$, de largeur 60 cm, de hauteur 60 cm et d'épaisseur 3 mm. On se place en régime stationnaire.

1. Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant à travers le simple vitrage.
2. On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué d'une vitre de 3 mm d'épaisseur, d'une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{\text{air}} = 0.025\,\text{W/m/K}$, d'épaisseur 10 mm et d'une autre vitre identique à la première. Donner le schéma thermique équivalent. Calculer le flux thermique sortant à travers le double vitrage et les différentes températures dans le double vitrage. Interpréter.

Exercice 6 - Contact thermique : On considère deux conducteurs thermiques cylindriques de même section en contact. On se place en régime stationnaire.



1. Donner l'unité de la conductivité thermique λ.
2. Exprimer T_C en fonction de a, b, des conductivités thermiques λ_1 et λ_2 et des températures T_1 et T_2.
3. Calculer T_C pour $a = b$, $\lambda_1 = 0.5$ SI (conducteur organique) et $\lambda_2 = 0.2$ SI (bois) puis 390 SI (cuivre). On donne $T_1 = 293$ K et $T_2 = 373$ K. Commenter

Exercice 7 - Assembler des résistances thermiques : On souhaite dimensionner le système de chauffage d'une maison à toit plat, sans étage, comportant six fenêtres à double vitrage. Les murs en béton sont couverts sur leur face intérieure par une couche d'isolant, et la conducto-convection opérant de part et d'autre des parois de la maison est caractérisée par un coefficient de Newton h qui varie selon la vigueur de la convection de l'air au contact des parois. Le flux thermique à travers le sol est supposé négligeable devant celui qui traverse les murs ou le toit. Combien de radiateurs à bain d'huile de 1.0 kW doit-on mettre en marche pour maintenir la maison à 20 °C, s'il fait 11 °C à l'extérieur ? Et s'il fait −4 °C ?

Données :

- ▷ Dimensions au sol de la maison : $7.00\,\mathrm{m} \times 8.00\,\mathrm{m}$
- ▷ Hauteur de la maison : $H = 4.00\,\mathrm{m}$
- ▷ Surface d'une fenêtre : $S_f = 1.50\,\mathrm{m}^2$
- ▷ Épaisseur d'une vitre simple : $e = 5.0\,\mathrm{mm}$
- ▷ Épaisseur d'air du double vitrage : $e' = 10\,\mathrm{mm}$
- ▷ Épaisseur du béton : $e_b = 300\,\mathrm{mm}$
- ▷ Épaisseur de l'isolant : $e_{\mathrm{iso}} = 100\,\mathrm{mm}$
- ▷ Conductivité thermique de l'air : $\lambda_{\mathrm{air}} = 0.026\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Conductivité thermique du verre : $\lambda_{\mathrm{v}} = 1.0\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Conductivité thermique du béton : $\lambda_{\mathrm{b}} = 2.0\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Conductivité thermique de l'isolant : $\lambda_{\mathrm{iso}} = 0.07\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Coefficient de Newton à l'extérieur : $h_{\mathrm{ext}} = 50\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$
- ▷ Coefficient de Newton à l'intérieur : $h_{\mathrm{int}} = 5.0\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$

Exercice 8 - Dimensionnement d'un igloo : La construction d'un igloo qui puisse abriter des chasseurs inuits pendant plusieurs semaines nécessite de faire des choix bien réfléchis. On considère ici un igloo hémisphérique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b, reposant sur un sol neigeux. Les conditions extérieures sont inhospitalières : le vent souffle en continu et la température extérieure est de −20 °C.

1. Déterminer l'expression de la résistance thermique de l'igloo, en négligeant dans un premier temps la conducto-convection et les transferts thermiques dans le sol. Les chasseurs disposent de blocs de glace et de blocs de neige compactée ; quel matériau est-il préférable d'utiliser pour tailler les briques de l'igloo ?
2. Conçu pour trois chasseurs, l'igloo est construit de façon à ce que la température intérieure T_{int} ne descende pas sous 0 °C. Calculer l'épaisseur minimale $e = b - a$ de l'igloo, sous les hypothèses précédentes.
3. On choisit une épaisseur de paroi hémisphérique égale à celle du cas limite précédent. Calculer la température T_{int} en tenant maintenant compte de la conducto-convection aux interfaces air/paroi. Discuter.
4. Afin que la ventilation de l'igloo ne remplace pas en permanence l'air intérieur chaud par de l'air froid, un tunnel souterrain est creusé dans l'entrée de l'igloo pour accéder à la chambre en passant sous le mur d'enceinte. Les pertes de chaleur sont alors faibles, car l'air froid est piégé dans ce tunnel, et la température à l'intérieur de l'igloo peut atteindre jusqu'à 5 °C. Dans ces conditions, pourquoi faut-il lisser les parois intérieures de l'igloo ?
5. On tient désormais compte des transferts thermiques dans le sol. On suppose que la température du sol, de même conductivité thermique que la paroi de l'igloo, est constante et égale à T_b à la profondeur l. Calculer la température intérieure dans ces conditions. Discuter.

Données :

- ▷ Surface caractéristique de l'igloo : $ab = 3.0\,\mathrm{m}^2$
- ▷ Température du sol à $l = 50\,\mathrm{cm}$ de profondeur : $T_b = -10\,°\mathrm{C}$
- ▷ Puissance thermique dégagée par un adulte : $\mathcal{P} = 80\,\mathrm{W}$
- ▷ Conductivité thermique de la glace : $\lambda_g = 2.0\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$ et de la neige compactée : $\lambda_n = 0.25\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Coefficient de Newton en convection naturelle : $h_N = 5\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$ et en convection forcée : $h_F = 30\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$

Élements de réponse :

5 - 1. 2070 W ; 2. 13.3 W, 19.9 °C et 5.1 °C.

6 - 2. $T_C = (T_1 b\lambda_1 + T_2 a\lambda_2)/(b\lambda_1 + a\lambda_2)$; 3. 316 K et 373 K.

7 - 1 à 11 °C et 3 à −4 °C.

8 - 1. $R_{\text{mur}} = \frac{b-a}{2\pi\lambda\, ab}$; 2. 0.39 m ; 3. 23.4 °C ; 5. −0.1 °C.

3 Équation de la chaleur en régime stationnaire

Exercice 9 - Comportement thermique de la Terre : Afin d'étudier le comportement thermique d'une planète tellurique en régime stationnaire, on la modélise par une sphère homogène de rayon R_T, de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ supposées uniformes. La distribution de température dans la planète est à symétrie sphérique, et l'interaction avec l'atmosphère impose une température de surface T_S uniforme également. Afin d'évaluer l'impact thermique de la radioactivité de la croûte superficielle d'épaisseur $R_T - R_C$, on suppose en outre que :

▷ pour $r \in [0, R_C[$, on néglige toute production d'énergie radioactive ;
▷ pour $r \in [R_C, R_T]$, des réactions nucléaires libèrent une puissance massique α.

1. Par une étude de symétries et d'invariances, déterminer la direction du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$, ainsi que les variables dont il dépend.
2. En procédant à un bilan énergétique à travers une calotte sphérique d'épaisseur dr, établir la forme du profil de température $T(r)$ de la planète. On distinguera la croûte de la planète interne.
3. Définir les conditions aux limites permettant de calculer les constantes d'intégration du profil $T(r)$. Montrer alors que l'on obtient dans la croûte :

$$T(r) = -\frac{\rho\alpha}{6\lambda}r^2 - \frac{\rho\alpha R_C^3}{3\lambda r} + \frac{\rho\alpha}{6\lambda}\left(R_T^2 + \frac{2R_C^3}{R_T}\right) + T_S$$

4. Déterminer l'expression de la température au centre de la planète dans ce modèle. Discuter son application numérique.
5. Sur Terre, le gradient de température en surface est d'environ 30 °C/km sur les plaines continentales. Le modèle étudié ici permet-il d'en rendre compte ? Quel phénomène influence aussi la valeur du gradient de surface actuel sur Terre ?

<u>**Données**</u> : Épaisseur de la croûte : $R_T - R_C = 30\,\text{km}$, rayon de la planète : $R_T = 6370\,\text{km}$, masse volumique : $\rho = 2800\,\text{kg/m}^3$, puissance massique radioactive : $\alpha = 5 \times 10^{-10}\,\text{W/kg}$, conductivité thermique : $\lambda = 4\,\text{W/(m}\cdot\text{K)}$, température de surface : $T_S = 17\,°\text{C}$.

Exercice 10 - Fusible en céramique : Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S et de longueur L. On connaît la masse volumique μ, les conductivités thermique λ et électrique σ, ainsi que la capacité thermique massique c_p du fil métallique. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température.

Comme le montre la figure 1, le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère comme des conducteurs électriques et thermiques parfaits. Ces plots sont maintenus à la température constante $T_0 = 17\,°\text{C}$ de l'air extérieur. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite. On considère que le fil métallique est parcouru par un courant uniforme d'intensité I constante.

1. Déterminer l'expression de la résistance électrique dR et la résistance thermique dR_{th} d'un tronçon de fil de longueur dx. Exprimer également sa masse dm.
2. En faisant un bilan énergétique sur une tranche d'épaisseur dx du fil, montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température inclut un terme source dont on discutera le sens physique

$$\mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ .$$

3. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure $T(x)$ de ce profil.
4. On utilise pour le fil un matériau de température de fusion $T_{\text{fus}} = 117\,°\text{C}$, de conductivité thermique $\lambda = 65\,\text{W/(m}\cdot\text{K)}$ et de conductivité électrique $\sigma = 1.2 \times 10^6\,\text{S/m}$. La longueur du fil est $L = 2.5\,\text{cm}$. Quelle section S faut-il prévoir pour que ce fusible fonde si le courant atteint $I_{\max} = 16\,\text{A}$?

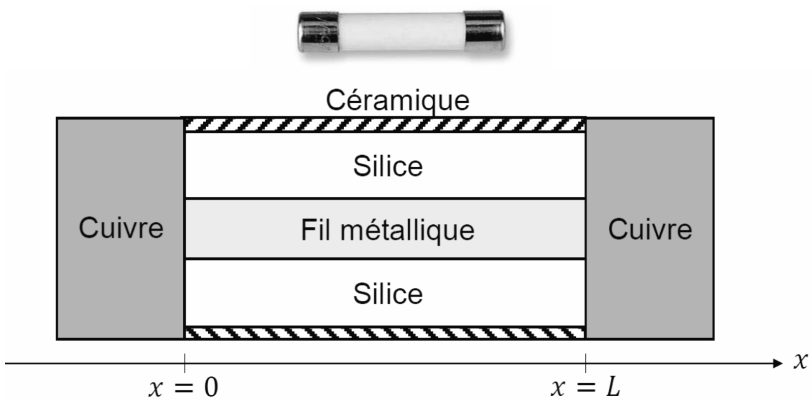


Fig. 1 – Fusible en céramique.

Exercice 11 - Refroidissement d'un processeur : On cherche à évaluer les performances d'une ailette de refroidissement accolée à un microprocesseur de serveur informatique. Il consiste en un assemblage de plaques de cuivre, mises en contact avec la face extérieure du microprocesseur, comme l'illustre la figure ci-dessous. Les caractéristiques techniques du modèle étudié sont fournies par le constructeur.

Fiche technique :

- ▷ Microprocesseur placé sous l'ailette.
- ▷ Puissance thermique maximale : 85 W
- ▷ Masse : 670 g
- ▷ Nombre de plaques soudées : 60
- ▷ Dimensions ailette (mm) : $25.0 \times 105 \times 60.0$
- ▷ Dimensions plaque (mm) : $25.0 \times 50.0 \times 1.0$
- ▷ Conductivité du cuivre : $\lambda = 390\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Coefficient de Newton (ventilation) : $h = 20\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$
- ▷ Température du microprocesseur : $T_1 = 60\,°\mathrm{C}$
- ▷ Température ambiante : $T_a = 30\,°\mathrm{C}$

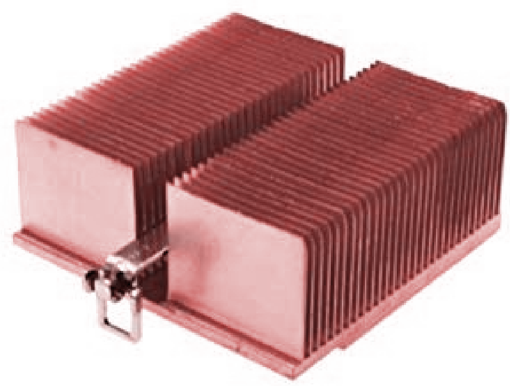


Fig. 2 – Ailette de refroidissement d'un microprocesseur.

On s'intéresse pour simplifier à la diffusion unidirectionnelle dans la direction (Ox) perpendiculaire au microprocesseur. Les effets de bords selon (Oy) et (Oz) sont négligés, donc la température est uniforme, à x fixé, sur toute la largeur $L_y = 50.0\,\mathrm{mm}$ et sur l'épaisseur $L_z = 1.0\,\mathrm{mm}$.

1. Construire un bilan de puissance sur un système bien choisi, pour établir en régime stationnaire l'équation différentielle régissant le profil de température $T(x)$ dans une plaque de cuivre.
2. Quelles conditions aux limites peut-on écrire pour calculer les constantes d'intégration du profil thermique ? En déduire la température $T(x = L_x)$ à l'extrémité d'une plaque.
3. Déterminer le flux thermique total évacué par l'ailette. Comparer aux données fournies par le constructeur.
4. La ventilation classique utilisée peine à faire circuler l'air ambiant entre les plaques de l'ailette, ce qui limite la valeur du coefficient h de Newton. Comment seraient modifiées les performances du dispositif avec une ventilation accrue, imposant $h = 40\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$?
5. Discuter l'influence des dimensions des plaques : quel serait le flux total évacué si la dimension L_y était multipliée par un facteur 4 ? Même question pour L_x. Discuter.

Élements de réponse : **9 -** 4. 274 °C.	**10 -** 1. $\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma S}$, $\mathrm{d}m = \mu S \mathrm{d}x$; 3. $T(x) = \frac{I^2}{2S^2\lambda\sigma}(L-x)x + T_0$; 4. 1.6 mm^2.	**11 -** 1. $0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\lambda L_z - 2h(T(x) - T_a)$; 2. 59 °C ; 3.88 W ; 4. 172 W.

4 Conduction thermique en régime non stationnaire

Exercice 12 - Chauffage d'un bâtiment : Un bâtiment, de capacité thermique $c = 7.6 \times 10^7\,\mathrm{J/K}$, est chauffé à la température uniforme $T_1 = 293\,\mathrm{K}$ par un chauffage central de puissance $P_1 = 210\,\mathrm{kW}$ constante, la température extérieure étant égale à $T_0 = 263\,\mathrm{K}$. On suppose que la quantité de chaleur δQ_p perdue par le bâtiment de température T pendant la durée dt s'écrit $\delta Q_\mathrm{p} = -ac(T - T_0)dt$ avec $a = 7.9 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$.

1. À la date $t = 0$, le chauffage est arrêté. En raisonnant sur un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.
2. En déduire la température T_2 du bâtiment après 3 h.
3. La température du bâtiment étant T_2, on remet le chauffage en marche. Exprimer puis calculer la température T_∞ théoriquement atteinte au bout d'une durée très grande.
4. Calculer la durée au bout de laquelle le bâtiment aura retrouvé sa température initiale T_1.

Exercice 13 - Effet de cave : L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est $T(0) = T_0 + a\cos\omega t$. On utilisera la notation complexe $\underline{T}(0) = T_0 + a\exp(j\omega t)$. Pour le sol, on note la masse volumique $\mu = 3.0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, la capacité thermique $c = 515\,\mathrm{J/kg/K}$ et la conductivité thermique $\lambda = 1.2\,\mathrm{W/K/m}$. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\mu c\omega}}$.

1. On cherche une solution de la forme $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(j\omega t)$. Déterminer $\underline{f}(x)$ et en déduire $T(x,t)$.
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15 °C autour d'une température moyenne de 3 °C en hiver.

Exercice 14 - Œuf à la coque : La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 g. Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un oeuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1.2 et 1.8 kg ?

Élements de réponse :

12 - 1. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + aT = aT_0$; 2. $T_2 \approx 276\,\mathrm{K}$; 3. $T_\infty \approx 298\,\mathrm{K}$; 4. $\approx 5\,\mathrm{h}$.

13 - 1. $T(x,t) = T_0 + a\exp(-x/\delta)\cos(\omega t - x/\delta)$; 2. 0.49 °C.

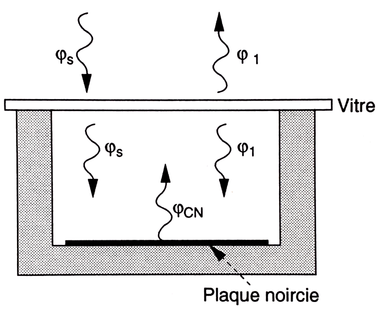
14 - $\tau_\mathrm{a} = \tau_\mathrm{p}\left(\dfrac{M_\mathrm{a}}{M_\mathrm{p}}\right)^{2/3} = 24$.

5 Rayonnement

Exercice 15 - Équilibre thermique par rayonnement : Une sphère de rayon r très faible est assimilable à un corps noir. Elle est placée entre deux plaques opaques P_1 et P_2 à la température T_1. Elle baigne dans un fluide transparent. Elle est pleine et homogène, de chaleur massique C et de masse volumique μ. Elle est supposée à chaque instant à la température $T(t)$ uniforme. Le fluide ambiant étant à l'équilibre, les échanges conducto-convectifs sont supposés négligeables. La température initiale de la sphère est notée T_0.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T.
2. On suppose que T reste voisine de T_1 à chaque instant, en lui restant supérieure. Montrer alors que l'équation différentielle peut être remplacée par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
3. Déterminer $T(t)$ et tracer son graphe.

Exercice 16 - Effet de serre : On étudie l'effet de serre produit par l'interposition d'une vitre au-dessus d'une plaque qui reçoit le rayonnement solaire. La plaque est noircie et assimilée à un corps noir. Le verre est supposé totalement transparent au rayonnement solaire. La vitre est en revanche totalement absorbante pour le rayonnement infra-rouge émis par la plaque qui absorbe le rayonnement solaire. On désigne par φ_s le flux solaire surfacique supposé arriver normalement à la vitre et à la plaque.



1. On suppose l'équilibre radiatif de la plaque et de la vitre. Écrire les équations exprimant ces équilibres et en déduire la température T de la plaque. Faire l'application numérique de T avec $\varphi_s = 0.6\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$. En déduire la valeur de la température T_1 de la vitre.
2. Reprendre la question précédente dans le cas de deux vitres. En déduire la température du sol.
3. Reprendre la question dans le cas de n vitres et montrer que $\sigma T^4 = (n+1)\varphi_s$.

En réalité, en tenant compte de la réflexion et de l'absorption du verre, la température maximale est atteinte pour un nombre fini de plaques, généralement 4 ou 5.

Exercice 17 - Bilan radiatif de la Terre : On utilisera les données suivantes : rayon du Soleil $R_S = 7\times10^5\,\mathrm{km}$, distance moyenne de la Terre au Soleil $D = 1.46\times10^8\,\mathrm{km}$, rayon de la Terre $R_T = 6400\,\mathrm{km}$, température moyenne au sol $T_0 = 287\,\mathrm{K}$.

1. La constante solaire E_0 est, par définition, la puissance reçue du soleil par unité de surface normale aux rayons solaires au « sommet » de l'atmosphère terrestre.
   (a) On admet qu'on peut assimiler l'émission solaire à celle d'un corps noir de température T_S (correspondant à la température superficielle du soleil). Calculer E_0 en fonction de D, R_S, T_S et de σ la constante de Stefan. On trouve expérimentalement $E_0 = 1.35\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$.
   (b) Le maximum de l'émission solaire en fonction de la longueur d'onde est obtenu pour $\lambda_m = 0.474\,\mathrm{\mu m}$. Cette valeur est-elle cohérente avec la valeur de T_S que l'on vient de calculer pour pouvoir assimiler l'émission solaire à celle du corps noir ?
2. L'albédo d'une surface est le rapport du flux qu'elle diffuse sans l'absorber au flux qu'elle reçoit. L'albédo A de l'ensemble Terre-atmosphère pour le rayonnement solaire est évalué à 0.34. On considérera que l'atmosphère terrestre est pratiquement transparente au rayonnement solaire. Pour tenir compte de la convexité de la Terre, on admet que la puissance solaire u reçue par unité de surface du cercle de rayon R_T vaut $E_0/4$.
   (a) Calculer le flux surfacique moyen φ du rayonnement émis par le sol en supposant l'équilibre radiatif au sol. On négligera dans cette question toute absorption par l'atmosphère du rayonnement émis par le sol de même que tout rayonnement propre de l'atmosphère. On exprimera φ_e en fonction de u. On assimile le sol rayonnement du sol à celui d'un corps noir de température T_p. Calculer sa valeur et la comparer à celle de T_0.
   (b) On tient compte maintenant du rayonnement de l'atmosphère et on suppose que le sol est modélisé par un corps noir de température T_0. On admet que seulement une fraction α du rayonnement infrarouge émis par le sol (de température T_0) peut traverser la totalité de l'atmosphère. En outre, l'atmosphère rayonne un flux surfacique moyen φ_1 au niveau du sol et dirigé vers le sol. Enfin, les couches atmosphériques les plus élevées ont un rayonnement propre vers l'extérieur du système terre-atmosphère correspondant un flux surfacique moyen φ_r (tous les flux indiqués sont comptés positivement). Faire un schéma récapitulatif et donner la condition d'équilibre radiatif au sol puis sur la frontière supérieure de l'atmosphère.
   (c) Calculer φ_e, φ_r et φ_1 pour $\alpha = 0.25$.
3. En fait, le bilan purement radiatif précédent ne tient pas compte de divers phénomènes qui participent au bilan thermique de l'atmosphère. Ainsi, de l'eau s'évapore à la surface du sol et se recondense dans l'atmosphère. La hauteur moyenne des précipitations annuelles est de 2 mètres d'eau. Évaluer l'ordre de grandeur de la puissance surfacique moyenne P_s transférée de cette façon de la Terre à l'atmosphère et conclure. On donne l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau $L_{vap} = 2600\,\mathrm{kJ/kg}$.

Élements de réponse :

15 - 1. $\mu C r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 3\sigma(T_1^4 - T^4)$; 3. $\tau = \mu C r/(12\sigma T_1^3)$ et $T(t) = (T_0 - T_1)\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_1$.

16 - 1. $T = 380\,\mathrm{K}$ et $T_1 = 320\,\mathrm{K}$; 2 . $T = 422\,\mathrm{K}$.

17 - 1. $E_0 = \sigma T^4(R_S/D)^2$; 2. a. $T_p = ((1-A)u/\sigma)^{1/4}$; c. $\varphi_e = 385\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, $\varphi_r = 179\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ et $\varphi_1 = 164\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$; 3. $P_s = 164\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

6 Pour aller plus loin...

Exercice 18 - Chocs thermiques : Une barre homogène, de section S et de grande longueur est thermiquement isolée latéralement. On désigne par λ sa conductivité thermique, par ρ sa masse volumique, par c sa chaleur massique et par $h = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ sa diffusivité.

On prendra l'axe (Ox) selon la longueur de la barre, avec l'origine au milieu. On s'intéresse à l'écart de température $\theta = T - T_0$ par rapport à la température d'équilibre T_0.

1. Écrire l'équation de la chaleur à laquelle obéit $\theta(x,t)$.

À un instant donné, la distribution de température est donnée par la loi

$$\theta(x,t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi h t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ht}\right)$$

avec $A > 0$.

2. Monter que cette fonction est solution de l'équation de la chaleur. Quelle est la limite de celle-ci lorsque $t \to 0$?
3. Définir et exprimer, à un instant t fixé, l'énergie thermique $\mathrm{d}U$ dans la tranche de barre comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ et qui correspond à l'élévation de température θ. Quelle est l'énergie thermique contenue dans toute la barre à un instant t donné ? On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.
4. Calculer en tout point la densité de courant thermique $j_Q(x,t)$.
5. Pour t fixé, quelle est l'abscisse x_m à laquelle j_Q est maximale ? Comment x_m dépend-il du temps ?

Exercice 19 - Congélation d'un plat cuisiné : On s'intéresse à la congélation d'une barquette alimentaire de $30 \times 20 \times 4\,\mathrm{cm}$ remplie d'aliments, sortant du réfrigérateur, et dont les caractéristiques physiques sont connues. On considère pour simplifier que tous les transferts thermiques ont lieu dans la direction d'épaisseur $e = 4\,\mathrm{cm}$, en négligeant les effets de bord. Lors de la congélation d'une barquette de soupe, on considère qu'à la date t, le front de congélation se trouve à la température de fusion $T_f = 0\,°\mathrm{C}$ et qu'une épaisseur x_f a déjà congelé, comme l'illustre la figure ci-dessous.

Les aliments contiennent généralement 80% d'eau, et lors de la congélation, l'eau liquide (intracellulaire et extracellulaire) se concentre en soluté, devenant ainsi moins facilement congelable. On considère donc que 75% du contenu de la barquette est constitué d'eau congelable. Ci-contre, le front de congélation progresse de l'extérieur froid à $T_\mathrm{ext} = -18\,°\mathrm{C}$ jusqu'au cœur de la barquette.

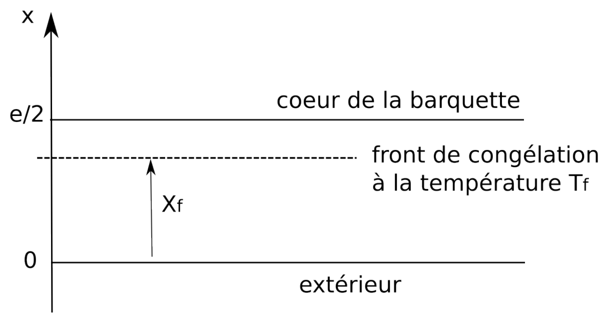


Fig. 3 – Front de congélation.

1. Comparer la chaleur latente massique L et la chaleur sensible massique q (liée à la chute de température) de la barquette refroidie de $5\,°\mathrm{C}$ à $0\,°\mathrm{C}$. Commenter.
2. Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique dans la partie congelée sur une épaisseur Δx. Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, le profil de température ne dépend pratiquement plus du temps. Préciser ce que l'on entend par « assez lentes ».
3. En régime quasi-stationnaire, exprimer la résistance thermique R_ext qui sépare le front de congélation de l'air froid extérieur, en tenant compte de la conduction dans la partie gelée, et de la conducto-convection à l'interface solide/air. En déduire l'expression de la densité de flux de chaleur j_ext dans la partie congelée, en fonction notamment sa conductivité thermique et du coefficient de Newton.
4. Pour estimer le temps nécessaire à la congélation, une première approche (modèle A) consiste à supposer que la barquette est brassée en permanence, et que son volume passe dans un premier temps de $T_1 = 5\,°\mathrm{C}$ à $T_f = 0\,°\mathrm{C}$, avant de voir le front de congélation migrer vers le cœur. Écrire le bilan enthalpique correspondant à chaque étape. Estimer alors la durée totale τ_A de congélation dans ce modèle, en froid statique, et en froid ventilé. Est-elle plus longue ou plus courte que la durée qui serait observée expérimentalement ?
5. Dans un autre modèle (noté B), on considère que toute tranche liquide se maintient à $T_1 = 5\,°\mathrm{C}$ tant qu'elle n'est pas atteinte par le front de congélation. A son arrivée, la tranche de soupe considérée évacue alors simultanément les énergies L et q à travers la partie congelée. Estimer le temps τ_B nécessaire à la congélation de la barquette, en froid statique, et en froid ventilé. Discuter.

6. Dans un troisième modèle (noté C), on suppose qu'il existe un transfert conducto-convectif à l'interface entre la soupe liquide et le front de congélation, caractérisé par le coefficient de Newton h'. On isole alors la tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$ qui givre pendant une durée $\mathrm{d}t$.
   (a) Faire un schéma de la situation ainsi modélisée. Écrire le bilan enthalpique de cette transformation, et montrer que le rapport $\frac{h'}{h}$ doit vérifier l'inégalité :
   $$\frac{h'}{h} < \frac{T_f - T_{\text{ext}}}{T_1 - T_f}$$
   (b) Sachant que pour un liquide en convection naturelle, on a généralement h' compris entre 50 et $10^3\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$, quelle valeur doit-on choisir pour h' ? A titre d'exemple, pour $h' = 50\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$ et $h = 20\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$, la durée de congélation de ce modèle est $\tau_C = 182\,\mathrm{h}$. Discuter.

Données :

- ▷ Masse volumique de la barquette : $\rho = 1500\,\mathrm{kg/m^3}$
- ▷ Capacité thermique massique de la barquette non gelée : $c_{\text{p,ali}} = 3.50\,\mathrm{kJ/(K\cdot kg)}$
- ▷ Capacité thermique massique de la barquette gelée : $c_{\text{p,gel}} = 1.50\,\mathrm{kJ/(K\cdot kg)}$
- ▷ Chaleur latente massique de fusion de l'eau : $\mathcal{L}_{\text{fus}} = 334\,\mathrm{kJ/kg}$
- ▷ Conductivité thermique de la barquette non gelée : $\lambda_{\text{ali}} = 0.6\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Conductivité thermique de la barquette gelée : $\lambda_{\text{gel}} = 1.30\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Conductivité thermique de l'air : $\lambda_{\text{air}} = 0.026\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$
- ▷ Coefficient de Newton en convection naturelle : $h_N = 5.0\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$
- ▷ Coefficient de Newton en convection forcée : $h_F = 20\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$

Exercice 20 - Conduction de la chaleur et création d'entropie : Un solide indilatable et de masse volumique μ a un distribution de température T non homogène.

L'existence d'un gradient de température dans ce solide entraîne une propagation de la chaleur par conduction. Pour étudier ce phénomène, on introduit un vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique, dont le flux à travers une surface quelconque est égal à la quantité de chaleur traversant cette surface par unité de temps. On désigne par c la chaleur massique du solide étudié, c étant supposée uniforme et indépendante de la température.

1. En exprimant la conservation de l'énergie, montrer que
$$\operatorname{div}\vec{j}_Q + \mu c\frac{\partial T}{\partial t} = 0\,.$$
2. Calculer d^2S, variation d'entropie de l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$ pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$. On rappelle que l'entropie massique d'une phase condensée s'écrit $s = \mu c \ln T + K$ avec K une constante.
3. Intégrer l'expression précédente sur tout le volume du solide. On pourra utiliser la relation vectorielle
$$\frac{1}{T}\operatorname{div}\vec{j}_Q = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{j}_Q}{T}\right) + \frac{1}{T^2}\vec{j}_Q\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T\,.$$
4. En identifiant le résultat à
$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} + \delta S_c\,,$$
donner l'expression l'entropie δS_c créée pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ dans tout le solide. En déduire l'expression de l'entropie créée par unité de volume et par unité de temps s_c.
5. Que devient cette expression avec la loi de Fourier ?

Élements de réponse :

18 - 3. $\mathrm{d}U = \rho c S\theta\mathrm{d}x$, $U = \rho c S A$; 4. $j_Q = \lambda x\theta/(2ht)$; 5. $x_{\mathrm{m}} = \sqrt{2ht}$.

19 - 2. $\Delta t \simeq \frac{\rho\, c_{\text{p,gel}} e^2}{\lambda_{\text{gel}}} \simeq 45\,\mathrm{min}$; 3. $R_{\text{ext}} = \frac{x_f}{\lambda_{\text{gel}}S} + \frac{1}{hS}$; 4. 25 h30 min et 7 h ; 5. 25 h45 min et 7 h10 min.

20 - 2. $\mathrm{d}^2S = \dfrac{\mu c}{T}\dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$; 4. $\delta S_c = -\iiint \dfrac{1}{T^2}\vec{j}_Q\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$; 5. $s_c = \dfrac{\lambda}{T^2}\vec{j}_Q\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T$.

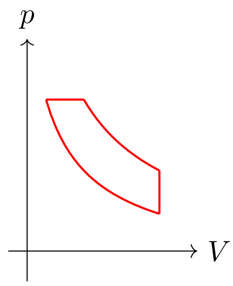
7 Sujets d'oraux

Oral 1 - CCINP - Refroidir une boisson : Quelle méthode est la plus efficace pour refroidir une boisson ? Lui ajouter 50 g d'eau à 0 °C ou 10 g de glace à 0 °C ? On supposera que le verre contient initialement 15 cL d'eau et est à 30 °C

Données : capacité calorifique de l'eau $C = 4.18\,\mathrm{kJ/K/kg}$ et enthalpie de fusion de le la glace $\ell = 333\,\mathrm{kJ/kg}$.

Oral 2 - CCINP - Étude d'un cycle : On étudie un moteur sur un cycle ABCD pour un gaz parfait.

On donne :
- ▷ AB : compression adiabatique réversible ;
- ▷ BC : réchauffement isobare ;
- ▷ CD : détente adiabatique réversible ;
- ▷ DA : refroidissement isochore.



1. Placer A, B, C et D sur le schéma ci-contre.
2. Donner les travaux et énergies thermiques, ainsi que leurs signes, sur chaque transformation.
3. Exprimer le rendement du moteur en fonction de $\gamma = C_\mathrm{p}/C_\mathrm{v}$ et des températures.

Oral 3 - Centrale - Courant électrique dans un fil : Soit un fil électrique en cuivre de rayon $R = 1\,\mathrm{mm}$ parcouru par un courant électrique. La température extérieure est $T_\mathrm{ext} = 20\,°\mathrm{C}$, la température à la surface du fil est T_surf. On donne l'expression de la densité volumique de courant thermique du fil, $j_\mathrm{surf} = h(T_\mathrm{surf} - T_\mathrm{ext})$, avec $h = 10\,\mathrm{W/m^2/K}$.

1. Évaluer le courant maximal qui peut passer dans le fil pour que la température à la surface du fil ne dépasse pas 60 °C.
2. Déterminer la température au cœur du fil lorsque ce courant maximal parcourt le fil.

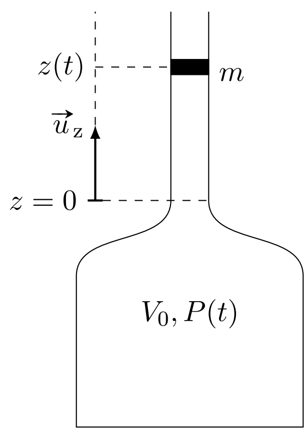
Données : conductivité électrique du cuivre : $\sigma = 6 \times 10^8\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$; conductivité thermique du cuivre : $\lambda = 390\,\mathrm{W/m/K}$.

Oral 4 - Mines-Ponts - Expérience de Rüchardt :

Prenons un grand récipient de volume V_0 rempli d'air. À l'ouverture de ce récipient, on fixe un long et fin tuyau de section S. On prend ensuite une masse m de section juste inférieure à S telle la masse entre parfaitement dans le tuyau.

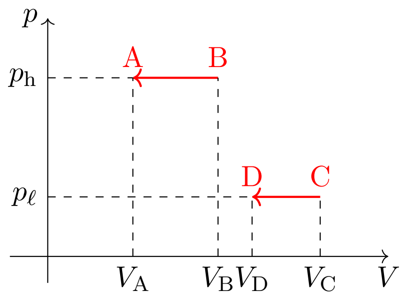
On note $z(t)$ la position de la masse au temps t. Les notations sont détaillées sur le schéma ci-contre. On néglige toutes les forces de frottement (fluides ou solide). On note $P_\mathrm{atm} = 1013\,\mathrm{hPa}$ la pression atmosphérique. On note $P(t)$ la pression de l'air dans le récipient total en fonction du temps.

La transformation est supposée isentropique et on note γ le coefficient de compression isentropique.



1. On déplace la masse m de sa position d'équilibre. Trouver les équations du mouvement.
2. Proposer une méthode pour mesurer γ.

Oral 5 - Polytechnique - Cycle adiabatique : On des transformations d'un gaz parfait dans le diagramme de Clapeyron.



1. Quelle(s) relation(s) doivent vérifier les volumes pour que les transformations B-C et D-A soient adiabatiques ?
2. On impose à présent $V_{\text{B}} - V_{\text{A}} = V_{\text{C}} - V_{\text{D}} = \Delta V$.
   (a) Trouver le point E qu'atteint le système après avoir fait les transformations A-B-C-D-E où B-C et D-E sont adiabatiques et où $p_{\text{E}} = p_{\text{h}}$.
   (b) Calculer le coefficient de dilatation $\alpha = \dfrac{1}{V_{\text{A}}}\dfrac{V_{\text{E}} - V_{\text{A}}}{T_{\text{E}} - T_{\text{A}}}$.

Élements de réponse :

1 - $T_f^1 = 295\,\text{K} < T_f^2 = 296\,\text{K}$.

2 - 3. $\dfrac{2}{\gamma} - 1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$.

3 - 1. 69 A ; 2. $T(R) + I^2/(4\sigma\lambda R^2\pi^2)$.

4 - 1. $\ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) = \omega^2 l_0$ avec $\omega = \sqrt{\gamma\frac{P_0 S^2}{mV_0}}$ et $l_0 = \frac{mV_0}{\gamma P_0 S^2}\left(\frac{S}{m}(P_0 - P_{\text{atm}}) - g\right)$.

5 - 1. $\dfrac{p_{\text{h}}}{p_\ell} = \left(\dfrac{V_tC}{V_{\text{B}}}\right)^\gamma = \left(\dfrac{V_tD}{V_{\text{A}}}\right)^\gamma$; 2. $V_{\text{E}} = V_{\text{A}} + \left(1 - \left(\dfrac{p_\ell}{p_{\text{h}}}\right)^{1/\gamma}\right)\Delta V$, $\alpha = 1/T_{\text{A}}$.