

Colle n° 18 : Electromagnétisme 9

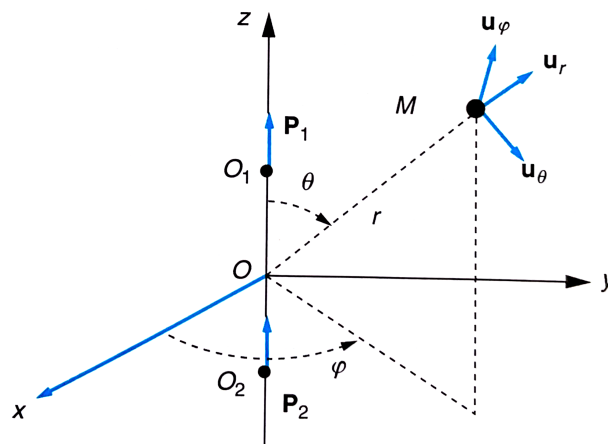
Exercice 1 - Ondes dans un électrolyte : Dans cet exercice, on cherche à modéliser l'impact d'une faible conductivité sur la propagation des ondes électromagnétiques. Cela impose notamment de rechercher une relation de dispersion dans un milieu matériel.

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans l'eau de mer, modélisée comme un électrolyte (solution contenant des ions responsables du transport du courant) de densité de charge $\rho = 0$ (le milieu est donc localement neutre), de permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = 80$ et par sa conductivité $\sigma \simeq 6 \text{ S/m}$ (on notera la faible conductivité, liée à la nature des porteurs de charge).

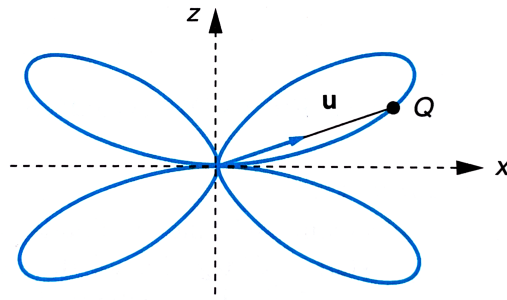
1. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu étudié. On admet que la nature du milieu consiste à remplacer ϵ_0 par $\epsilon_r \epsilon_0$.
2. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique.
3. Déterminer la relation de dispersion du milieu et la commenter.
4. Quel est le domaine de fréquence à privilégier pour la communication sous-marine ?

Exercice 2 - Modèle élémentaire d'antenne : Deux dipôles oscillants de moments dipolaires $\mathbf{p}_1 = p_0 \cos(\omega t - \omega a/c) \mathbf{u}_z$ et $\mathbf{p}_2 = p_0 \cos(\omega t + \omega a/c) \mathbf{u}_z$ sont placés aux points O_1 et O_2 de l'axe Oz de cotes respectives $z_1 = a$ et $z_2 = -a$. En un point M éloigné, on peut considérer que les champs ont été émis par O pour exprimer tous les facteurs géométriques $r_1/c = O_1M/c$ et $r_2/c = O_2M/c$. Ces deux dipôles rayonnent alors un champ électrique de la forme :

$$\mathbf{E} = (\ddot{p}_1(t - r_1/c) + \ddot{p}_2(t - r_2/c)) \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \mathbf{u}_\theta .$$



1. Exprimer r_1 et r_2 en fonction de r , a et θ en limitant les calculs à l'ordre 1 en l'infiniment petit a/r .
2. En admettant qu'à grande distance, l'onde est localement plane de direction de propagation \mathbf{u}_r , en déduire l'expression du champ magnétique \mathbf{B} .
3. En déduire l'expression de la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting.
4. Dans le cas d'une antenne demi-onde, c'est-à-dire telle que $2\omega a/c = \pi$, on a tracé ci-dessous l'indicatrice de rayonnement en portant dans chaque direction \mathbf{u}_r du plan une longueur proportionnelle à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting à r fixé. Commenter l'allure de cette indicatrice. Dans quelle direction la puissance moyenne rayonnée est nulle ? Interpréter sans calculs.



Exercice 3 - Couche anti-reflet : Un milieu transparent, d'indice N , est limité par une surface plane. Cette surface est recouverte par une couche mince transparente d'indice n et d'épaisseur uniforme e . Une onde plan progressive monochromatique incidente \vec{E}_1 provient de l'air et arrive sur la surface $x = 0$ sous incidence normale. Elle donne naissance à une onde réfléchie \vec{E}'_1 et une onde transmise \vec{E}_2 . L'onde \vec{E}_2 arrive sur la surface $x = e$. Elle donne naissance à une onde réfléchie \vec{E}'_2 et une onde transmise \vec{E}_3 .

On rappelle que l'indice optique est donné par $n = \frac{ck}{\omega}$ avec k le nombre d'onde. Il n'y a ni charge, ni courants à l'interface.

1. Faire un schéma en représentant les différents champs.
2. Déterminer $\underline{r} = \frac{E'_1}{E_1}$ le coefficient de réflexion en amplitude dans le cas où $e = \lambda/(4n)$.
3. Comment doit-on choisir n pour éliminer les pertes de lumière par réflexion ? Application numérique pour $N = 1.8$.
4. Quelle est l'épaisseur correspondante pour $\lambda = 560 \text{ nm}$?

Exercice 4 - Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère : On étudie la propagation des ondes radio transverses à l'interface atmosphère-ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région $z > 0$ et l'atmosphère dans la région $z < 0$. Le champ incident est $\vec{E}_i = E_0 \exp[j(\omega t - kz)]\vec{e}_x$. Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchie et l'autre partie est transmise. L'indice

de réfraction de la ionosphère vaut $n = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. La fréquence plasma vaut $f_p = 6.9 \text{ MHz}$. On admet que, dans ces conditions, le champ électromagnétique est continu en $z = 0$.

1. Déterminer les coefficients de réflexion \underline{r} et de transmission \underline{t} en amplitude pour le champ électrique.
2. Calculer les vecteurs de Poynting moyens incidents, réfléchis et transmis. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance (correspondant aux rapports des normes des vecteurs de Poynting moyens). Quelle est la relation entre R et T ?
3. Quelle est la valeur de R lorsque $\omega < \omega_p$? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?