

Table des matières

1	Rappel sur les transferts thermiques	1
1.1	La chaleur	1
1.2	Les trois types d'échanges thermiques	1
1.3	Bilan local d'énergie	2
2	Conduction dans un milieu immobile	6
2.1	Loi de Fourier	6
2.2	Équation de la diffusion thermique	6
2.3	Régime stationnaire en absence de source et résistances thermiques	7
2.4	Effet de peau thermique	8
3	Couplage conducto-conductif à l'interface solide/fluide	9
3.1	Loi de Newton	9
3.2	Régime stationnaire en géométrie cartésienne et résistance thermique.	10
4	Le rayonnement thermique	10
4.1	Définitions	10
4.2	Le rayonnement d'équilibre	11
4.3	Le modèle du corps noir	14

1 Rappel sur les transferts thermiques

1.1 La chaleur

Lorsque l'on met en présence deux corps pris à des températures différentes, au bout d'un certain temps, les deux températures sont égales, l'équilibre thermique est atteint. Le corps le plus chaud a vu sa température diminuer et le corps le plus froid a vu sa température augmenter.

On dit qu'il y a eu transfert thermique entre les deux corps. S'il n'y a pas d'intervention extérieure l'échange a toujours lieu du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Au cours d'un transfert thermique il peut se produire un changement d'état. Alors que le travail correspond à un transfert ordonné d'énergie, le transfert thermique correspond à un transfert désordonné de l'énergie.

Définition. On appelle **chaleur** l'énergie échangée au cours d'un transfert thermique. On la note Q . Contrairement au travail, la chaleur est un transfert d'énergie microscopique **désordonnée**. La chaleur dépend de la transformation et non pas des états extrémaux de celle-ci. Un échange infinitésimal de chaleur se note donc δQ .

1.2 Les trois types d'échanges thermiques

1.2.1 La conduction

Définition. Le transfert de chaleur par **conduction** est un échange d'énergie se réalisant au sein d'un système sans déplacement de matière. Ce transfert peut se réaliser au sein d'un seul corps ou par contact entre deux corps.

Exemple 1 : Lorsqu'une tige immobile métallique est chauffée à une extrémité, l'ensemble de la tige va chauffer par conduction.

1.2.2 La convection

Définition. Le transfert de chaleur par **convection** est dû au déplacement de molécules de différentes températures, il se déroule dans un fluide (un liquide ou un gaz). Ces molécules se déplaçant, elles transfèrent leur chaleur à un autre endroit du système.

En faisant chauffer de l'eau dans une casserole par le fond, un mouvement d'eau apparaît qui tend à homogénéiser par mélange la température du système. L'eau chaude étant plus légère que l'eau froide, grâce à la poussée d'Archimède, elle monte et tend donc à mettre l'ensemble du fluide en mouvement.

Remarque : Il est possible dans certains cas très précis de donner une expression algébrique à cet échange de chaleur. Dans la plupart des cas, il est très difficile voire impossible d'exprimer simplement mathématiquement cet échange.

1.2.3 Le rayonnement

Définition. Le transfert de chaleur se fait par **rayonnement** électromagnétique. Quelle que soit sa température, un corps émet un rayonnement thermique, celui-ci est plus ou moins intense selon cette température. La longueur d'onde à laquelle est émise ce rayonnement dépend aussi de cette température.

Ainsi, le rayonnement électromagnétique thermique émis par le Soleil est situé principalement dans le visible. Des corps plus froids comme les mammifères émettent quant à eux dans l'infrarouge et les corps plus chauds émettent vers le bleu et l'ultraviolet. Ce phénomène explique la couleur des objets chauds.

Il faut retenir que les ondes électromagnétiques transfèrent de la chaleur. Il n'y a pas besoin de support matériel, sinon le Soleil ne pourrait pas transmettre de chaleur.

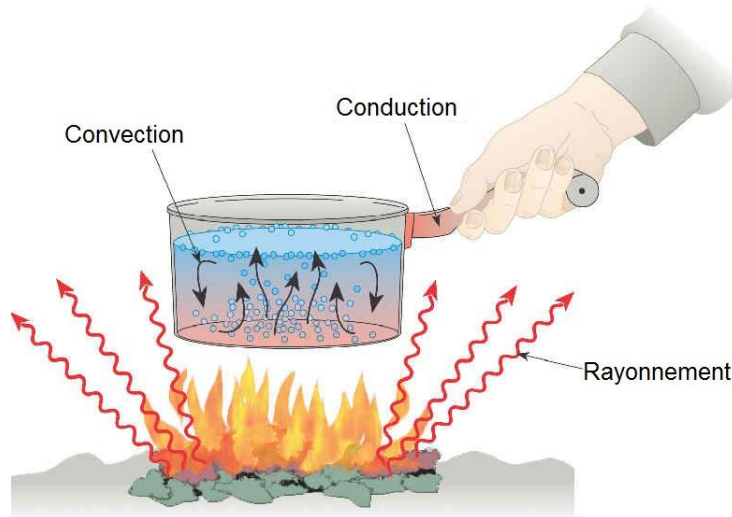


Fig. 1 – Les trois types d'échanges thermiques

1.3 Bilan local d'énergie

Étudions un système composé d'une phase condensée incompressible et indilatable soumis à des échanges d'énergie thermique. Ce système est à l'**équilibre mécanique**, il ne subit aucune force et ne se déforme pas.

On rappelle que le premier principe dans ce cas s'exprime, pour un système macroscopique,

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c = W + Q \quad \text{d'où} \quad \Delta U = Q$$

avec les hypothèses d'équilibre mécanique, U étant l'énergie interne du système.

Remarque : Il s'agit d'un solide incompressible, le travail des forces de pression est donc nul. Les bilans d'énergie peuvent se faire en utilisant l'enthalpie ou l'énergie interne dont les variations se confondent ici.

Ainsi, en notant $U(t)$ l'énergie interne présente dans ce système à l'instant t et étudions la variation de celle-ci entre t et $t + dt$. La variation de celle-ci correspond à la différence entre les chaleurs entrante et sortante aux interfaces plus une éventuelle chaleur produite (qui peut aussi être interprétée comme un travail selon les cas). On a le bilan

$$U(t + dt) - U(t) = \delta Q_{\text{entrante}} - \delta Q_{\text{sortante}} + \delta Q_{\text{produite}} . \quad (1.1)$$

Remarque : La transformation étant à pression fixée, il est aussi possible de conduire un bilan d'enthalpie plutôt qu'un bilan d'énergie interne.

Variation d'énergie interne :

Définition. Ensuite, celle-ci est reliée à la température par la **capacité thermique massique** d'un matériau c (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$) à travers la relation $dU = \rho c dT dV$ avec ρ la masse volumique du système.

Remarque : Pour une phase condensée et incompressible, on rappelle que les capacités thermiques à volume et à pression constantes sont quasiment égales, soit $c_V \approx c_P = c$.

On rappelle la règle de calcul différentiel, similaire au calcul d'un développement limité d'ordre 1, $f(y + dy) = f(y) + f'(y)dy$. Cette égalité est vraie à l'ordre 1. On a donc

$$U(t + dt) - U(t) = \frac{\partial U}{\partial t} dt = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt dV .$$

Terme source :

Définition. On définit la **puissance volumique thermique** \mathcal{P}_V créée $\delta Q_{\text{produite}} = \mathcal{P}_V dV dt$. Elle s'exprime en W/m^3 .

Elle rend compte de phénomènes endo- ou exothermiques *in situ*, tels qu'une transition de phase, une réaction chimique, une réaction nucléaire, ou encore un effet Joule.

Flux thermique :

Définition. Tout type de transfert thermique est décrit par son **flux thermique** Φ , qui est la quantité de chaleur δQ qui traverse une surface donnée par unité de temps. On écrit ainsi $\delta Q = \Phi dt$, où l'on voit que Φ est une puissance, et s'exprime donc en watts.

D'un point de vue géométrique, Φ est défini comme le flux du **vecteur densité de courant thermique** \vec{j}_{th} (en W/m^2) :

$$\Phi = \iint \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} .$$

On a alors

$$\delta Q_{\text{entrante}} - \delta Q_{\text{sortante}} = (\Phi_{\text{entrant}} - \Phi_{\text{sortant}}) dt .$$

Conclusion : il vient donc en repartant de (1.1) et en simplifiant par dt ,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = (\Phi_{\text{entrant}} - \Phi_{\text{sortant}}) + \mathcal{P}_V dV . \quad (1.2)$$

1.3.1 Cas d'un système unidimensionnel cartésien

Considérons une portion de solide linéaire de surface transverse S . Considérons une portion infinitésimale comprise entre x et $x + dx$ comme représenté figure 2. Dans ce cas, on a le volume infinitésimal $dV = S dx$.

Par définition du flux thermique, il vient

$$\Phi_{\text{entrant}} - \Phi_{\text{sortant}} = \Phi(x) - \Phi(x + dx) = j_{\text{th}}(x)S - j_{\text{th}}(x + dx)S$$

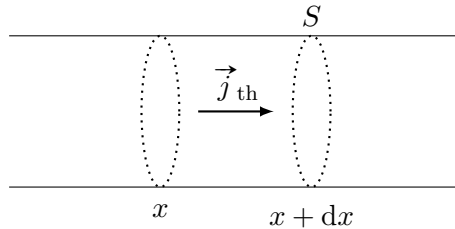


Fig. 2 – Portion de solide unidimensionnelle cartésienne comprise entre x et $x + dx$.

car la surface étant infinitésimale, le flux du vecteur densité de courant thermique est constant.

En repartant de (1.2), il vient

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} S dx = - \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} S dx + \mathcal{P}_V dV .$$

En simplifiant par $dV = S dx$, il vient la relation

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} + \mathcal{P}_V} . \quad (1.3)$$

1.3.2 Cas d'un système unidimensionnel cylindrique

On se place en géométrie cylindrique à une dimension radiale. On a donc $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r) \vec{e}_r$. Le système élémentaire est un cylindre compris entre le rayon r et $r + dr$.

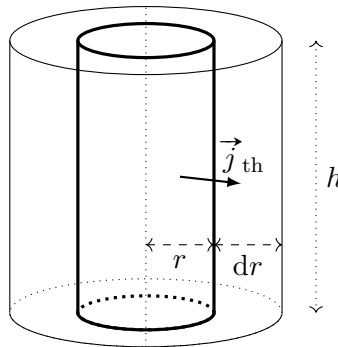


Fig. 3 – Portion de solide unidimensionnelle cylindrique comprise entre r et $r + dr$.

Reprenons donc le bilan de flux de l'équation (1.2)

$$\Phi_{\text{entrant}} - \Phi_{\text{sortant}} = S(r) j_{\text{th}}(r) - S(r + dr) j_{\text{th}}(r + dr) = \frac{\partial}{\partial r} (S(r) j_{\text{th}}(r)) dr$$

avec $S(r) = h 2\pi r$ la surface du cylindre.

La relation (1.2) devient alors

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial r} (S(r) j_{\text{th}}(r)) dr + \mathcal{P}_V dV .$$

Or le volume élémentaire de la calotte cylindrique vaut $dV = V(r + dr) - V(r) = \frac{dV}{dr} dr = 2\pi r h dr$ car $V(r) = h\pi r^2$. En remplaçant les termes, on arrive à l'équation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\text{th}}) + \mathcal{P}_V .$$

1.3.3 Cas d'un système unidimensionnel sphérique

On se place en géométrie sphérique à une dimension radiale. On a donc $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r)\vec{e}_r$. Le système élémentaire est une sphère comprise entre le rayon r et $r + dr$.

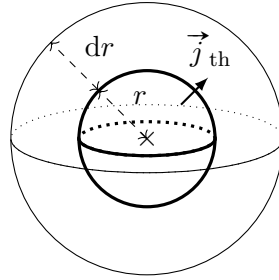


Fig. 4 – Portion de solide unidimensionnelle sphérique comprise entre r et $r + dr$.

Reprenons donc le bilan de flux de l'équation (1.2)

$$\Phi_{\text{entrant}} - \Phi_{\text{sortant}} = S(r)j_{\text{th}}(r) - S(r + dr)j_{\text{th}}(r + dr) = \frac{\partial}{\partial r}(S(r)j_{\text{th}}(r))dr$$

avec $S(r) = 4\pi r^2$ la surface de la sphère.

La relation (1.2) devient alors

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial r}(S(r)j_{\text{th}}(r))dr + \mathcal{P}_V dV .$$

Or le volume élémentaire de la calotte cylindrique vaut $dV = V(r + dr) - V(r) = \frac{dV}{dr}dr = 4\pi r^2 dr$ car $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. En remplaçant les termes, on arrive à l'équation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_{\text{th}}) + \mathcal{P}_V .$$

1.3.4 Généralisation

À l'aide de l'opérateur divergence, la généralisation de l'équation (1.3) est immédiate. En effet, par définition, la divergence d'un champ vectoriel en un point multiplié par le volume infinitésimal autour de celui-ci représente le flux sortant à travers la surface infinitésimale autour de ce point. Ainsi, l'énergie interne un peu plus tard est égale à ce que l'on avait avant plus l'énergie créée moins ce qui est parti, soit

$$U(t + dt) = U(t) + \mathcal{P}_V dV dt - (\text{div } \vec{j}_{\text{th}}) dV dt .$$

| *Application 1* : Montrer que ce résultat est l'application de la formule de Green-Ostrogradsi.

Il vient donc

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \rho c (T(t + dt) - T(t)) dV = U(t + dt) - U(t) = (-\text{div } \vec{j}_{\text{th}} + \mathcal{P}_V) dV dt$$

soit directement

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_{\text{th}} + \mathcal{P}_V .}$$

En appliquant les différentes définitions de l'opérateur divergence à différentes géométrie, on retrouve systématiquement les équations des différentes géométries.

2 Conduction dans un milieu immobile

2.1 Loi de Fourier

En 1807, Joseph Fourier présente à l'Académie des Sciences une loi phénoménologique qui décrit adéquatement la conduction thermique dans un milieu immobile homogène et isotrope (à condition que le gradient de température n'y soit ni trop fort ni trop fluctuant).

Propriété. La loi de Fourier donne le vecteur densité de courant conductif

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

où λ est la **conductivité thermique** du milieu, exprimée en $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

Le signe $-$ de cette loi phénoménologique rend compte du sens du transfert spontané de chaleur du chaud vers le froid, issu du Second Principe de la Thermodynamique.

2.1.1 Quelques ordres de grandeur de conductivité thermique (à connaître) :

Matériau	cuivre	acier	verre	béton	eau (20 °C)	air
λ (W/(m · K))	390	13	1	0.9	0.6	0.03

2.2 Équation de la diffusion thermique

On injecte la loi phénoménologique de Fourier dans le bilan d'énergie de l'équation (1.3) dans le cas cartésien à une dimension, soit $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$.

Propriété. On obtient l'équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur) à une dimension cartésienne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{P}_V}{\rho c}$$

où $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ est la diffusivité thermique (en m^2/s), quantifiant la capacité du milieu à diffuser la chaleur en son sein, sans mouvement macroscopique avec λ la conductivité thermique, ρ la masse volumique et c la capacité calorifique massique.

Remarque : Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles linéaire. L'étude de ces équations en général est hors programme. On verra quelques cas particuliers où la résolution peut être menée.

Application 2 : On rappelle que, lorsque la température dépend uniquement de la variable r , le gradient en coordonnées cylindriques et sphérique vaut $\overrightarrow{\text{grad}} T(r) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$. En déduire l'équation de la chaleur en géométrie cylindrique et sphérique.

On rappelle que que le laplacien scalaire est défini par $\Delta A = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} A)$. La généralisation à trois dimensions dans toute géométrie implique donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{\mathcal{P}_V}{\rho c} \quad (2.1)$$

2.2.1 Le phénomène de diffusion

Propriété. La diffusion thermique est un processus irréversible : cela se voit en remplaçant la variable t par $-t$ dans l'équation de diffusion, conduisant à un comportement différent (ce ne serait pas le cas avec une dérivée seconde en temps, comme pour l'équation de d'Alembert).

En absence de source, la diffusivité thermique D d'un milieu permet de **construire une loi d'échelle** reliant le temps caractéristique de diffusion τ à la portée L du phénomène.

En effet, on a

$$\frac{T}{\tau} \sim D \frac{T}{L^2}$$

soit $L^2 \sim D\tau$. Ainsi, une élévation de température en $x = 0$ à la date $t = 0$ sera ressentie en $x = L$ au bout d'un temps $\tau = L^2/D$. Le carré est important : l'effet sera perçu en $x = 20L$ au bout d'un temps 400 fois plus long !

2.3 Régime stationnaire en absence de source et résistances thermiques

Propriété. En régime stationnaire les grandeurs physiques ne varient pas : **aucune accumulation d'énergie thermique n'est possible localement**. Ainsi, toute l'énergie entrant dans un volume de contrôle en ressort, si elle n'est pas consommée *in situ*.

Ainsi, en l'absence de terme de puits/source d'énergie, le flux conductif $\Phi = \iint \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS}$ est **constant** : il est le même en entrée et en sortie de tout volume de contrôle.

L'équation de la chaleur (2.1) devient simplement $\Delta T = 0$.

2.3.1 Analogie avec l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires en électrocinétique

D'après l'équation de la diffusion, en régime stationnaire, et en l'absence de terme de puits/source d'énergie, le flux thermique qui traverse un volume de contrôle est proportionnel à la différence de température de part et d'autre de ce volume. C'est aussi ce qu'il se passe pour un flux de charges traversant un volume conducteur de résistance R et de différence de potentiel ΔV . On construit ainsi une analogie thermique complète avec les lois de l'ARQS en électrocinétique.

Cette analogie provient formellement de la structure similaire de la loi d'Ohm locale $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$ et de la loi de Fourier.

Électrocinétique (ARQS)	Thermique (stationnaire)
$V_A - V_B$	$T_1 - T_2$
I	Φ
R	R_{th}
Loi d'Ohm : $U = RI$	$T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\Phi$

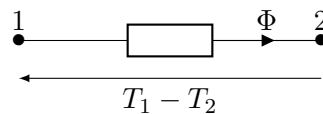


Fig. 5 – Loi d'Ohm thermique en convention récepteur $T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\Phi$.

Ainsi, toutes les relations utilisant les résistances électriques sont valables, soit les résistances équivalentes ainsi que les ponts diviseurs.

2.3.2 En géométrie cartésienne :

A travers une barre calorifugée de longueur L et de conductivité thermique λ , encadrée par deux thermostats à T_1 et $T_2 < T_1$, le régime stationnaire impose un profil thermique affine

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L}x.$$

On en déduit le flux $\Phi = j_{\text{th}}S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S$.

Il vient en géométrie cartésienne $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$.

2.3.3 En géométrie cylindrique :

On considère une tuyauterie d'axe (Oz) , de longueur h et de conductivité thermique λ , contenant de l'eau chaude à T_1 . Son rayon intérieur est R_1 , son rayon extérieur R_2 . La surface extérieure est à la température T_2 . Le régime permanent implique qu'il n'y ait aucune accumulation d'énergie en tout point du matériau ; le flux total Φ à travers tout cylindre d'axe (Oz) et de rayon r prend donc une valeur constante :

$$\Phi = \text{Cste} = j_{\text{th}}(r)2\pi r h = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r h. \text{ En intégrant de } R_1 \text{ à } R_2 \text{ entre les températures } T_1 \text{ et } T_2, \text{ on obtient}$$

$$T(R_1) - T(R_2) = \frac{\Phi}{\lambda 2\pi h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

$$\text{Il vient en géométrie cylindrique } R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

2.3.4 En géométrie sphérique :

On considère une boule, de longueur R_1 contenant de l'eau chaude à T_1 . Cette boule est entourée d'une coquille de conductivité thermique λ . Son rayon intérieur est R_1 , son rayon extérieur R_2 . La surface extérieure est à la température T_2 . Le régime permanent implique qu'il n'y ait aucune accumulation d'énergie en tout point du matériau ; le flux total Φ à travers toute sphère de rayon r prend donc une valeur constante :

$$\Phi = \text{Cste} = j_{\text{th}}(r)4\pi r^2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2. \text{ En intégrant de } R_1 \text{ à } R_2 \text{ entre les températures } T_1 \text{ et } T_2, \text{ on obtient}$$

$$T(R_1) - T(R_2) = \frac{\Phi}{\lambda 4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$$\text{Il vient en géométrie sphérique } R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

2.4 Effet de peau thermique

Plaçons nous en géométrie cartésienne. On considère une demi-espace $x > 0$ d'un matériau de conductivité thermique λ . On suppose qu'à $x = 0$, la température est décrite par une fonction sinusoïdale $T(x = 0, t) = T_0 + a \cos(\omega t)$. Ce modèle permet de décrire les variations de température dans le sol, la surface étant soumise à des variations de température journalière ou saisonnière.

Repartons de l'équation de la chaleur sans terme sources, on a alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

On cherche une solution sous la forme $T(x, t) = \Re[\underline{T}(x, t)]$ avec $\underline{T}(x, t) = T_0 + a \underline{f}(x) \exp(i\omega t)$. Cette forme permet de tenir compte du fait que, en chaque point, la température est sinusoïdale. L'amplitude de cette onde peut toutefois varier avec la profondeur.

En injectant cette solution dans l'équation aux dérivées partielles, il vient

$$i\omega a \underline{f}(x) \exp(i\omega t) = D \underline{f}''(x) a \exp(i\omega t)$$

soit

$$\underline{f}''(x) - \frac{i\omega}{D} \underline{f}(x) = 0.$$

On note \underline{k} la solution du polynôme caractéristique. On a donc $\underline{k}^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$. Or on sait que $i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ soit

$$k = \pm \left(\frac{i\omega}{D} \right)^{1/2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} (1 + i).$$

On ne conserve que la solution avec $-$ car sinon la température diverge lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Il vient alors, en tenant compte des conditions aux limites en $x = 0$,

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + a \exp\left((i\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x) \right) = T_0 + a \exp\left(i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x \right) \right) \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x \right).$$

On a alors

$$T(x, t) = \Re[\underline{T}(x, t)] = T_0 + a(x) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right).$$

Propriété. L'onde se propage selon la direction x mais est exponentiellement amortie sur une distance caractéristique δ . Son amplitude s'écrit donc $a(x) = a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$.

On appelle δ l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$.

Remarque : Parfois, cette onde est qualifiée à tort d'évanescence. Les ondes évanescentes ne se propagent pas et dont le nombre d'onde est imaginaire pur.

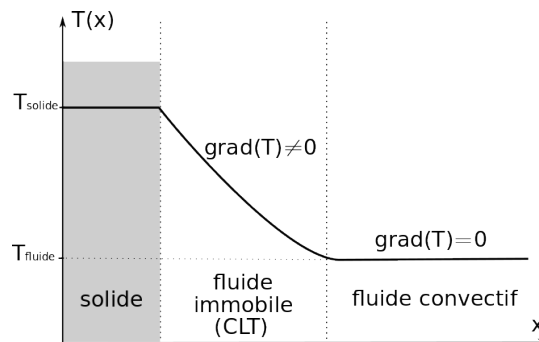
Dans ce cas, la vitesse de phase de l'onde sera $v_\phi = \omega\delta$. On rappelle que la vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation de cette onde de pulsation ω fixée.

On constate que l'épaisseur de peau est d'autant plus grande que la pulsation est petite. Autrement dit, les variations de faible fréquence, donc de période longue, pénètrent plus en profondeur. Par exemple, la température d'une cave n'est pas soumise aux variations de température journalière alors qu'elle est sensible aux variations de températures saisonnières.

3 Couplage conducto-conductif à l'interface solide/fluide

3.1 Loi de Newton

A l'interface entre un solide (milieu immobile donc purement conductif) et un fluide convectif, les échanges de chaleur sont complexes à décrire à l'échelle microscopique. Un modèle macroscopique simple consiste à définir entre le solide et le fluide convectif (bien mélangé, donc de température uniforme) une **couche limite thermique (CLT)** constituée de fluide quasi-immobile (par adhérence visqueuse). Dans cette couche d'épaisseur e , on observe expérimentalement un gradient de température, ce qui signifie que la convection y est négligeable devant la conduction thermique.



Propriété. En régime permanent, le profil de température au sein de la couche limite thermique est supposé affine, et borné par la température de l'interface solide T_{sol} d'une part, et celle du fluide convectif T_f d'autre part. La densité de courant thermique dans la couche limite du fluide s'écrit donc $j_{th} = \frac{\lambda_f}{e}(T_{sol} - T_f)$ où λ_f est la conductivité thermique du fluide (air, eau, huile...) au contact du solide étudié. Ce modèle permet de comprendre la loi phénoménologique utilisée à l'interface solide/fluide. Il s'agit de la **loi de Newton** donnant la densité de courant conducto-convectif

$$j_{cc} = h(T_{sol} - T_f) .$$

Dans de nombreux problèmes, la condition aux limites sera donnée en flux, et non pas en température. À titre d'exemple, la sensation thermique n'est pas liée à la température, mais au flux. À température identique, la sensation sera différente selon que le flux est plus ou moins important. Ainsi, en présence de vent, le flux conducto-convectif est plus important, la sensation de froid est accentuée.

Application 3 : Donner l'équation vérifiée par $T(x)$ dans une barre cylindrique de rayon r et de conductivité thermique λ . Le coefficient conducto-convectif vers l'extérieur est noté h et la température extérieure T_{ext} .

3.1.1 Quelques ordres de grandeur du coefficient de conducto-convection :

- ▷ interface solide/gaz (convection naturelle) : $h \simeq 5 - 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
- ▷ interface solide/gaz (convection forcée) : $h \simeq 10 - 300 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
- ▷ interface solide/liquide (convection naturelle) : $h \simeq 50 - 10^3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.
- ▷ interface solide/liquide (convection forcée) : $h \simeq 300 - 10^4 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

3.2 Régime stationnaire en géométrie cartésienne et résistance thermique

En régime stationnaire, le flux à l'interface solide/fluide $\Phi_{cc} = hS(T_{sol} - T_f)$ issu de la loi de Newton permet de définir la résistance thermique conducto-convective

$$R_{cc} = \frac{T_{sol} - T_f}{\Phi_{cc}} = \frac{1}{hS}.$$

4 Le rayonnement thermique

4.1 Définitions

Définition. Un corps porté à la température T émet un rayonnement électromagnétique appelle « rayonnement thermique ». Il se propage à la vitesse de la lumière.

Contrairement à la conduction et à la convection, ce rayonnement peut se propager dans le vide. À titre d'exemple, on peut penser au rayonnement solaire ou à la chaleur rayonnée par une flamme et certains radiateurs.

Remarque : Ce rayonnement correspond au flux du vecteur de Poynting étudié en électromagnétisme.

L'énergie transmise provient des oscillations, ou des transitions, des électrons au niveau atomique. Cette énergie émise est une composante de l'énergie interne du corps émetteur. De plus, cette énergie est portée par un rayonnement électromagnétique. Le rayonnement dépend donc de la longueur d'onde du rayonnement.

Toute forme de matière rayonne mais le phénomène est différent selon l'état physique et la longueur d'onde :

- ▷ pour les matériels **transparents** à la longueur d'onde, les phénomènes radiatifs sont volumiques ;
- ▷ pour les autres, les phénomènes radiatifs sont surfaciques. Ces corps sont dit **opaques**.

Remarque : En réalité, le phénomène radiatif provient d'une couche de très faible épaisseur à la surface du milieu, généralement de l'ordre du micromètre.

Pour les milieux, il n'existe pas de transparence ou d'opacité absolue, celle-ci dépend de fenêtres de longueur d'onde. Par exemple, le verre est transparent dans le visible mais opaque aux infrarouges.

4.1.1 Propriétés radiatives

Un corps peut être soumis à différents phénomènes :

- ▷ **la réflexion** : le rayonnement incident sur un corps opaque est renvoyé dans d'autres directions ;
- ▷ **l'absorption** : le rayonnement absorbé par le corps opaque est transformé en énergie interne ;
- ▷ **l'émission** : l'énergie interne du corps est convertie en énergie radiative, c'est le phénomène inverse de l'absorption.

Si un matériau est susceptible d'absorber un rayonnement, il est en général susceptible d'émettre dans les mêmes plages de longueur d'onde.

Certains corps sont de plus qualifiés de **diffusant** si les propriétés radiatives sont indépendantes de la direction, comme par exemple le tissu, le papier, le verre dépoli...

4.1.2 Puissances (ou flux) surfaciques

Définition. La **puissance (ou flux) surfacique** est la puissance par unité de surface traversant celle-ci. On la note φ et s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Dans le cas d'un corps opaque, le flux ne peut être émis que sur le demi-espace opposé au corps. On parle donc de flux hémisphérique.

☞☞☞ **Attention !** Dans les paragraphes sur la conduction, la notation ϕ faisant référence à une puissance alors que φ fait ici référence à une puissance surfacique.

On note :

- ▷ φ^r la puissance surfacique réfléchie ;
- ▷ φ^a la puissance surfacique absorbée ;
- ▷ φ^e la puissance surfacique émise.

Par convention, ces puissances surfaciques sont comptées positivement.

Par conservation de l'énergie, il vient :

- ▷ la puissance incidente $\varphi^i = \varphi^r + \varphi^a$;
- ▷ la puissance partante $\varphi^p = \varphi^r + \varphi^e$.

On définit de plus la puissance radiative surfacique $\varphi^R = \varphi^p - \varphi^i = \varphi^e - \varphi^a$. Cette puissance apparaît naturellement dans les bilans énergétiques globaux et peut être positive ou négative.

4.2 Le rayonnement d'équilibre

4.2.1 La loi de Planck

On étudie un corps opaque diffusant convexe dans un milieu transparent. Ce corps émet dans toutes les directions un rayonnement thermique. Les échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière s'effectuent par quanta d'énergie $h\nu$ correspondant à des échanges de photons.

On suppose que le corps est à l'équilibre thermique à la température T .

Sous cette hypothèse, dans un milieu transparent, la densité spectrale d'énergie en longueur d'onde du rayonnement thermique w_λ à l'équilibre thermique à la température T est donnée par la **loi de Planck**

$$w_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide, h la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann. Cette grandeur est l'énergie volumique de rayonnement comprise dans un intervalle de longueur d'onde compris entre λ et $\lambda + d\lambda$ (en $\text{J} \cdot \text{m}^{-4}$). Elle est tracé pour différentes températures figure 6.

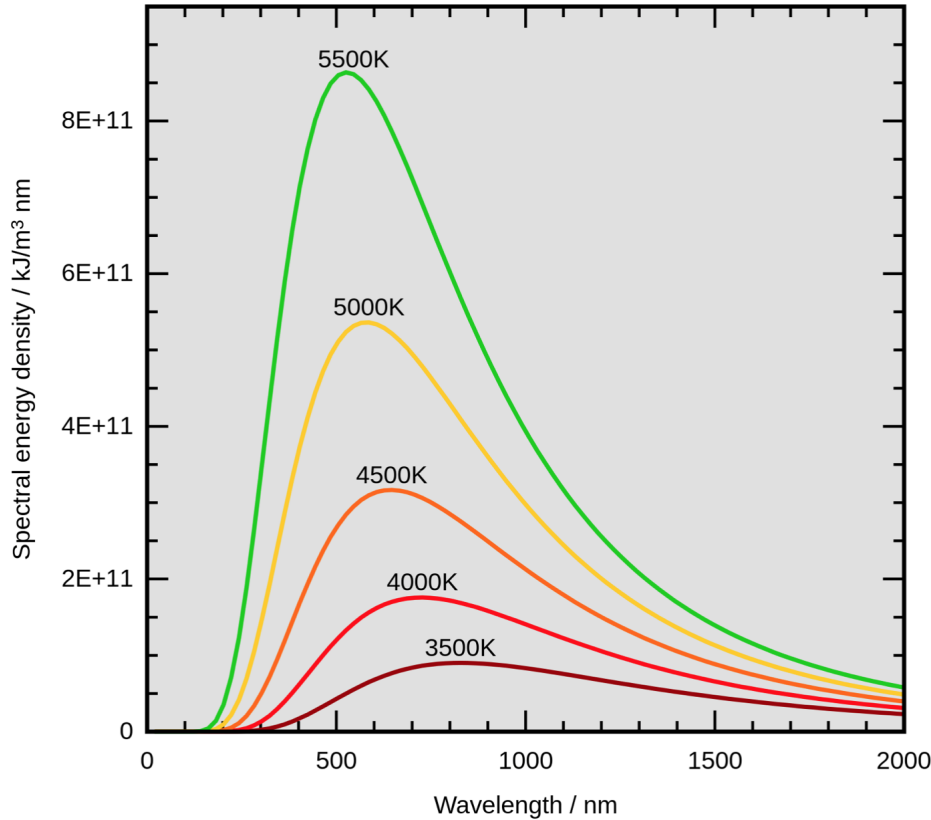


Fig. 6 – Densité spectrale d'énergie en longueur d'onde du rayonnement thermique w_λ en fonction de la longueur d'onde à températures différentes (image Wikipedia).

On admet que le flux total émis est alors relié à cette densité spectrale par la relation

$$\varphi^e = \int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{d\lambda} d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{c}{4} w_\lambda d\lambda .$$

| **Remarque** : Ces relations ne sont pas à connaître.

Commentaire historique : À la fin du 19^{ème} siècle, les physiciens essayaient de comprendre le spectre du rayonnement des corps noirs en se fondant sur la physique classique, la physique statistique et l'électrodynamique classique. Des hypothèses contradictoires (loi de Wien, loi de Rayleigh-Jeans) et une concordance seulement partielle avec les résultats expérimentaux conduisirent à une situation non satisfaisante. C'est Max Planck qui, à la fin du siècle, réussit à trouver une loi de rayonnement complètement en accord avec les mesures expérimentales. Outre l'importance pratique du corps noir, la découverte de la loi de Planck en 1900 signe la naissance de la mécanique quantique : pour expliquer sa loi trouvée de manière empirique, Planck a dû supposer que la lumière (et donc le rayonnement électromagnétique en général) n'était pas absorbée et émise de manière continue, mais uniquement de manière discrète. Cette quantification de l'énergie sera à l'origine de l'article de 1905 d'Albert Einstein sur l'effet photoélectrique, mais Planck ne considère ces éléments d'énergie que comme des artefacts de calculs, car il ne croit pas à l'hypothèse atomiste...

4.2.2 La loi de Wien

On cherche à connaître la longueur d'onde pour laquelle la densité d'énergie w_λ est maximale. Pour cela, on pose $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$. Ainsi, il vient $w_\lambda(x) = A \frac{x^5}{e^x - 1}$ avec A une constante que l'on ne cherche pas à déterminer.

On cherche le maximum de cette fonction en la dérivant, soit

$$\frac{dw_\lambda(x)}{dx} = A \left(\frac{5x^4}{e^x - 1} + x^5 \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} \right) = \frac{Ax^4}{e^x - 1} \left(5 - \frac{xe^x}{e^x - 1} \right) .$$

Cette dérivée s'annule pour $e^{-x} = 1 - \frac{x}{5}$.

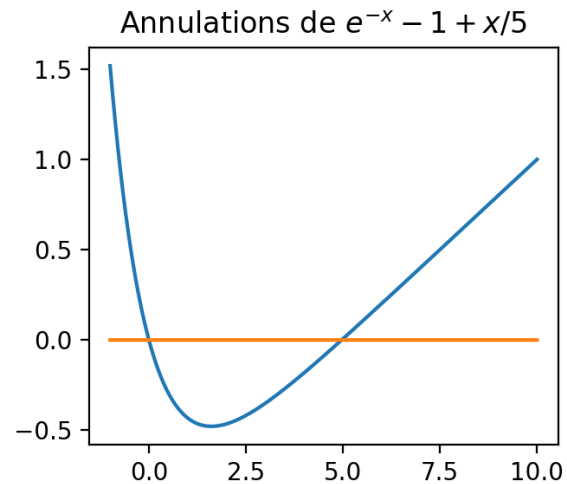
Étude numérique : On réalise le code python suivant :

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x) :
    return exp(-x) - 1 + x/5

x = linspace(-1, 10, 2000)
plt.plot(x,f(x))
plt.plot(x,0*x)
plt.title(r'Annulations de $e^{-x} - 1 + x/5$')
plt.show()
```

```
>>> from scipy.optimize import bisect
>>> bisect(f,4,5)
4.965114231743428
```



On constate graphiquement que cette équation a deux solutions, $x = 0$ (qui ne nous intéresse pas) et $x_m \approx 4.965$. On en déduit donc $\lambda_m T = \frac{hc}{k_B x_m}$.

Propriété. La **loi de Wien** indique que la longueur d'onde λ_m qui maximise la densité spectrale d'énergie à la température T vérifie

$$\lambda_m T = 3 \text{ mm} \cdot \text{K} .$$

De plus, on peut montrer que 98% de l'énergie émise est comprise entre $\lambda_m/2$ et $8\lambda_m$.

Cette relation peut s'observer figure 6, la position des maxima suivant une hyperbole. La remarque sur l'énergie provient de l'aire sous la courbe.

Cette relation permet d'estimer la température d'un corps en mesurant son spectre. On constate de plus que la longueur d'onde diminue avec la température. Ainsi, par exemple, les étoiles bleues sont plus chaudes que les étoiles rouges. De même, lorsqu'un métal chauffe, il passe du rouge puis au jaune puis au blanc (avec un maximum dans le bleu).

Par exemple, la Terre, et les êtres vivants, ont une température au voisinage de 300 K, ce qui implique une longueur d'onde maximale de 10 μm , soit de l'infrarouge. Les filtres à infrarouge permettent d'observer ce rayonnement, même en nuit noire. En général, pour des températures inférieures à 800 K, le rayonnement est essentiellement infrarouge.

Le maxima d'émission du Soleil est lui autour de 0.6 μm , ce qui correspond à une température de surface de environ 5000 K. De plus, l'étendue spectrale englobe bien la totalité du spectre visible.

4.2.3 La loi de Stefan

On a vu que le flux partant est donné par la relation

$$\varphi^p = \int_0^{+\infty} \frac{c}{4} w_\lambda d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} d\lambda .$$

On pose à nouveau le changement de variable $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ et il vient alors

$$\varphi^p = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx .$$

Cette intégrale se calcule de façon exacte et vaut $\pi^4/15$.

On pose alors $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}$.

Propriété. La loi de Stefan indique que le flux surfacique émis d'un corps opaque en équilibre thermique vaut

$$\varphi^e = \sigma T^4$$

avec $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

À haute température, comme la température est à une puissance élevée, ce flux est largement dominant sur les autres flux conductifs ou convectifs.

Exemple du Soleil : Par exemple, la puissance rayonnée par le Soleil vaut $\mathcal{P}_\odot = (\sigma T_\odot^4) 4\pi R_\odot^2$ avec $T_\odot = 5700 \text{ K}$ et $R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$. Cela conduit à une puissance $\mathcal{P}_\odot = 3.6 \times 10^{26} \text{ W}$. On rappelle que la puissance d'une tranche de centrale nucléaire à fission est de 1 GW, l'origine de la puissance du Soleil provient de la fusion nucléaire des noyaux d'hydrogènes en noyaux plus lourds, bien plus énergétique que la fission.

De plus, la relation d'Einstein indique $d\mathcal{E} = dm c^2$ soit une perte de masse par unité de temps $\frac{dm}{dt} = \frac{\mathcal{P}_\odot}{c^2} = 4 \times 10^9 \text{ kg/s}$ (sachant que la masse du Soleil vaut $2 \times 10^{30} \text{ kg}$).

Au niveau de la Terre, la puissance calculée au paragraphe précédent est toujours présente mais diluée sur une sphère de rayon $d = 1.49 \times 10^{11} \text{ m}$ (une unité astronomique, la moyenne de la distance Terre-Soleil). Ainsi, le flux surfacique reçu au niveau de la Terre vaut $\varphi_S = \frac{\mathcal{P}_\odot}{4\pi d^2} = 1.3 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$, ce qui rapporté à la surface transverse de la Terre implique une puissance reçue $\mathcal{P}_S = \pi R_T^2 \varphi_S = 1.66 \times 10^{17} \text{ W}$ en prenant $R_T = 6400 \text{ km}$.

Remarque : Attention, ce flux n'est pas celui reçu en un point quelconque de la Terre car il faut tenir compte de l'inclinaison des rayons solaires incidents dus à la courbure de la Terre et au fait qu'une partie des rayons sont réfléchis par l'atmosphère.

4.3 Le modèle du corps noir

Le modèle précédent ne dépend pas du corps. Il est simplement nécessaire d'être à l'équilibre thermique.

Définition. Un **corps noir** est un corps opaque absorbeur intégral d'énergie, c'est-à-dire que quelle que soit la direction et la longueur du rayonnement incident, on a $\varphi_{\text{CN}}^a = \varphi^i$.

Cette définition est très restrictive. En général, un corps pourra être considéré comme un corps noir sur certaines gammes de longueurs d'ondes. Par exemple, le verre et le plâtre blanc sont des corps noirs dans l'infrarouge et un dépôt noir de fumée est un corps noir à température ambiante.

Remarque : Un corps noir n'est donc pas nécessairement de couleur noire.

Propriété. Un corps noir à l'équilibre thermique local à la température T émet une puissance thermique $\varphi_{\text{CN}}^e = \sigma T^4$, y compris si le corps n'est pas à l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.

En effet, l'émission est liée uniquement à la structure interne du corps noir. Dans ce modèle, toute l'énergie incidente est absorbée puis réémise car la température du corps est fixée, donc il n'accumule pas d'énergie. Il est à noter que, si le rayonnement incident et le rayonnement émis sont égaux, ils ne sont pas nécessairement portés dans des photons de même longueur d'onde. La couleur du corps noir dépend uniquement de sa température.

4.3.1 Exemple et ordre de grandeur

Considérons un corps à l'équilibre thermique local T dans un four considéré comme un thermostat à la température T_e . Le flux radiatif total φ^R correspond au flux émis φ^e moins le flux incident en provenance de l'air dans le four considéré comme un corps noir φ^i . Il vient

$$\varphi^R = \varphi^e - \varphi^i = \sigma(T^4 - T_e^4).$$

Le flux radiatif est non nul, ce qui implique que le corps va changer de température. Cela est contradictoire avec l'équilibre thermique supposé en hypothèse. Toutefois, cet échange étant très lent, on peut considérer que l'équilibre thermique est atteint à chaque instant ce qui permet d'appliquer à chaque instant les lois précédentes.

Si on suppose que $T = T_e + \delta T$ avec $\delta T \ll T_e$ (on rappelle que les températures sont en Kelvin), il vient

$$\varphi^R \approx 4\sigma T_e^3(T - T_e).$$

Or à 300 K, $4\sigma T_e^3 \approx 6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, à comparer avec le coefficient conducto-convectif avec en convection naturelle avec l'air qui est de l'ordre de 5 à 30 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Autrement dit, le rayonnement est plus faible mais du même ordre de grandeur que les échanges conducto-convectifs. Ils ne doivent pas être négligés dans un bilan thermique.

4.3.2 Application à l'étude de l'effet de serre

Pour simplifier l'étude, on néglige les échanges conducto-convectifs entre les différents milieux et l'air ambiant.

Température du sol soumis au rayonnement solaire : Considérons un champ soumis au rayonnement solaire assimilé à un corps noir à l'équilibre thermique. L'équilibre radiatif implique que le flux émis par le sol φ_T est égal au flux solaire incident φ_S .

Le sol étant un corps noir, il vient

$$\varphi_S = \varphi_T = \sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{\varphi_S}{\sigma} \right)^{1/4}.$$

En prenant un flux solaire incidence $\varphi_S = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, on arrive à $T = 270 \text{ K}$.

Remarque : Ce modèle est ultra simpliste. On néglige en effet tout effet atmosphérique. Il permet toutefois de se fixer les idées.

Réflexion et absorption d'une plaque de verre : On considère une plaque de verre d'indice optique $n_2 = 1.5$ recevant le rayonnement solaire. Le coefficient de réflexion en puissance sur le verre est $r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$ avec $n_1 = 1$ l'indice de l'air. Ainsi, $r^2 = 0.04$ soit 4% de l'énergie incidente sur le verre est réfléchi.

De plus, on estime que environ 2% de l'énergie incidente est absorbée par le verre, cette énergie étant majoritairement située dans le domaine infrarouge pour lequel le verre est totalement absorbant. Ainsi, le verre peut être assimilé à un corps noir dans l'infrarouge.

Cela implique donc que 94% de l'énergie solaire incidente traverse la plaque de verre.

Toutefois, le rayonnement émis par le sol est lui très majoritairement dans l'infrarouge. Ainsi, le flux provenant du sol est lui totalement absorbé par le verre.

Cette différence de réaction du verre en fonction de la longueur d'onde, et donc face aux flux du soleil ou du sol, est le moteur de l'effet de serre.

Bilans radiatifs : Pour simplifier, on néglige l'absorption et la réflexion.

Effectuons un bilan d'énergie sur le verre. Comme celle-ci a deux faces libres, le flux émis est à compter deux fois dans les deux directions. On a donc

$$\varphi_S + \varphi_T = 2\varphi_V + \varphi_t = 2\varphi_V + \varphi_S.$$

Effectuons un bilan d'énergie sur la terre enserrée, on a

$$\varphi_T = \varphi_t + \varphi_V = \varphi_S + \varphi_V.$$

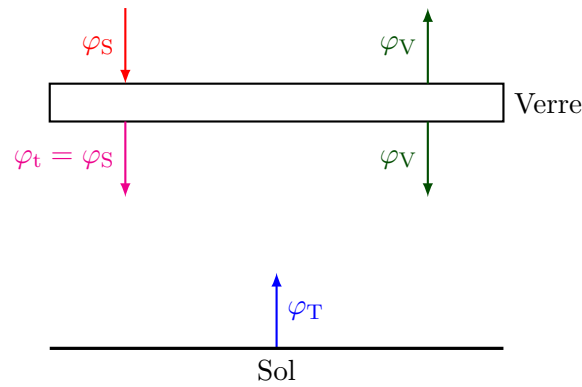


Fig. 7 – Schématisation de l'effet de serre. Ce bilan provient que le verre est transparent pour le flux solaire car, au vu des longueurs d'ondes présentes dans ce flux, on néglige l'absorption. Par contre, tout le flux provenant du sol est absorbé car il est très majoritairement dans l'infrarouge.

En manipulant ces deux équations, on arrive à

$$\varphi_V = \varphi_S \quad \text{et} \quad \varphi_T = 2\varphi_S .$$

La terre est assimilée à un corps noir soit $\varphi_T = \sigma T_T^4$ et le verre aussi grâce à ses propriétés d'opacités dans l'infrarouge soit $\varphi_V = \sigma T_V^4$.

En prenant un flux solaire incidence $\varphi_S = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, on arrive à $T_V \approx 270 \text{ K}$ et $T_T \approx 320 \text{ K}$.

On constate que la température de la terre est nettement plus élevée en présence de la serre, ce qui permet donc de faire pousser des légumes en hiver.

Remarque : Ce modèle peut être étendu à l'étude de l'effet de serre au niveau du globe. Toutefois, ce modèle est très simpliste et il nécessite en réalité de prendre en compte plusieurs couches d'atmosphères pour donner des résultats cohérents avec les observations.