EM 5 Le champ électromagnétique

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI*- 2025-2026

Table des matières

1 Les équations de Maxwell

1.1 Énoncé

Les équations de Maxwell permettent de déterminer totalement le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, et sont de deux natures : deux équations relient le champ électromagnétique à ses sources, et deux autres donnent des informations sur la structure du champ. Les équations de Maxwell sont des lois locales, dont découlent les théorèmes de Gauss et d'Ampère. Ces équations sont **postulées** comme vraies, elles ne peuvent pas être démontrées. À l'heure actuelle, aucune expérience n'a mis en défaut leurs prédictions théoriques.

1.1.1 Lien entre champ et sources : équations de Maxwell-Gauss et Maxell-Ampère

Postulat. Les équations de **Maxwell-Gauss** (1.1) et de **Maxwell-Ampère** (1.2) donnent le lien local entre le champ électromagnétique et ses sources. Elles s'écrivent, avec ρ la densité de charge et $\vec{j}$ la densité volumique de courant :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}\,, \tag{1.1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}\,. \tag{1.2}$$

Le terme $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère est appelé **densité de courant de déplacement**.

1.1.2 La structure du champ : équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Thomson

Postulat. Les équations de **Maxwell-Thomson** (1.3) et de **Maxwell-Faraday** (1.4) renseignent sur la structure du champ électromagnétique :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}\,, \tag{1.3}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}\,. \tag{1.4}$$

> ***Remarque :*** *Dans les milieux matériels, ces équations se formulent différemment, car les expressions des densités de charge et de courant y sont en général plus compliquées. En pratique, les équations données ci-dessus sont utilisables dans le vide et les conducteurs.*

1.2 Propriétés des équations de Maxwell

1.2.1 Linéarité

Les équations de Maxwell sont *linéaires* : considérons deux distributions de charges et de courants D_1 et D_2, caractérisées par les densités de charge ρ_i et de courant $\vec{j_i}$. Les champs qu'elles produisent sont donnés par les équations de Maxwell.

La réunion de ces deux distributions de charge est décrite par la densité de charge totale $\rho = \rho_1 + \rho_2$ et la densité de courant totale $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$. Le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ total créé par la distribution D est **la somme** des champs électromagnétiques $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ respectivement générés par les distributions D_1 et D_2.

Propriété. Le théorème de superposition n'est que le reflet de la linéarité des équations de Maxwell.

> ***Remarque :*** *La linéarité est également respectée dans le cas où les sources de charge et de courant dépendent linéairement du champ électromagnétique. Il existe toutefois des situations où les champs sont suffisamment forts pour générer des effets non-linéaires. Dans ce cas, la linéarité (et le théorème de superposition) ne sont plus valides.*

1.2.2 Champ statiques et constants

On constate que les champs statiques et constants sont tous solutions des équations de Maxwell homogènes (sans sources). Les équations de Maxwell étant linéaires, ces constantes peuvent donc toujours apparaître quels que soient les distributions de charge et de courant, en plus des champs correspondant à ces distributions, c'est-à-dire des solutions particulières de ces équations.

En général, ces champs n'ont soit pas de réalité physique car ils contiennent une énergie infinie pour exister dans tous l'espace, soit ils ne correspondent pas aux champs que l'on souhaite étudier, en général propagatifs. On pourra toujours les prendre nuls en indiquant qu'ils ne nous intéressent pas.

1.3 Compatibilité avec la conservation de la charge

Commençons par admettre l'identité $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{X}\right) = 0$ valable pour tout champ de vecteurs $\vec{X}$. Celle-ci se démontre par un calcul direct et s'interprète comme « ce qui sort (la divergence) d'un champ qui tourne (car c'est un rotationnel) est nul ».

Si l'on prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, on trouve :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = 0 = \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right)$$

Si on utilise maintenant l'équation de Maxwell-Gauss pour exprimer la divergence du champ électrique, on trouve immédiatement ł'équation de conservation de la charge :

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\,,$$

attestant ainsi de la compatibilité des équations de Maxwell avec cette contrainte. Notons toutefois le rôle important joué par le courant de déplacement $\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, qui permet d'assurer la conservation de la charge hors du régime statique.

1.4 Conséquences intégrales des équations de Maxwell

1.4.1 Induction - Loi de Faraday

L'application du théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday (1.4) permet de retrouver la loi de Faraday pour l'induction. En considérant un contour **fermé** Γ sur lequel s'appuie une surface Σ :

$$e = \oint_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\cdot\vec{E} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{d}S}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{d}S}\cdot\vec{B}\right) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\Sigma(\vec{B})}{\mathrm{d}t}\,.$$

1.4.2 Théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss (1.1) n'est pas modifiée par rapport au cas statique. En conséquence, le théorème de Gauss reste vrai en régime dépendant du temps. On l'obtient en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky à l'équation de Maxwell-Gauss. Sur un volume V délimité par une surface **fermée** Σ, on trouve ainsi

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathrm{d}V = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi_\Sigma(\vec{E})\,.$$

1.4.3 Conservation du flux du champ magnétique

En effet, en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, $\iiint_\mathcal{V} \operatorname{div} \vec{A}(M)\mathrm{d}V = \oiint_\mathcal{S} \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ sur l'équation de Maxwell-Thomson.

Propriété. Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul. Le champ est dit à **flux conservatif**.

1.4.4 Théorème d'Ampère généralisé

L'équation de Maxwell-Ampère est modifiée en régime variable par rapport au cas statique. Le courant de déplacement agit comme une source pour le champ magnétique. L'application du théorème de Stokes conduit à :

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{B}) = \int_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_\Sigma \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0\mu_0 \iint_\Sigma \mathrm{d}\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[I_{\text{enl}} + I_{\text{depl}}\right]\,,$$

avec Γ un contour **fermé** et orienté et le courant de déplacement étant le flux de la densité de courant de déplacement, soit $I_{\text{depl}} = \iint_\Sigma \mathrm{d}\vec{S} \cdot \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}, t)$, avec Σ une surface orientée par la règle de la main droite s'appuyant sur le contour Γ.

Propriété. Le théorème d'Ampère généralisé indique que, sur tout contour fermé et orienté Γ, on a

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \left[I_{\text{enl}} + I_{\text{depl}}\right]}\,.$$

Les courants se calculent à l'aide des flux des densité de courant sur une orientée par la règle de la main droite s'appuyant sur le contour Γ.

En régime stationnaire, le courant de déplacement est nul et on retrouve le théorème d'Ampère.

1.5 Approximation des régimes quasi stationnaires

Considérons une expérience ayant lieu sur une durée typique T et sur une distance typique L. Par exemple, en électronique, L correspond à la longueur de câbles et T.

Définition. Dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS), les phénomènes de propagation des champs sont négligeables.
Autrement dit, les variations du champ ne sont pas dues à une phénomène propagatif. Ainsi, la distance parcourue par l'onde pendant une variation temporelle typique est très grande devant la variation spatiale typique de l'onde, soit $L \ll cT$.

Dans ce cadre, les variations du champs sont donc liées à des variations des sources. On considère alors que les effets de ces variations se transmettent instantanément au champ dans tout l'espace dans lequel l'ARQS est valable.

1.5.1 ARQS magnétique

Considérons un champ électromagnétique de variation spatiale typique ℓ et de variation temporelle typique τ. Autrement dit, pour mesurer une variation significative du champ, il faut se déplacer de la distance ℓ ou attendre le temps T. On note c la vitesse de propagation du champ. Par définition de ces variations typiques, on a $\ell \sim c\tau$ car la distance typique de variation est parcourue pendant la durée typique de variation.

Reprenons différents termes des équations de Maxwell en ordre de grandeur. On a, grâce à Maxwell-Gauss,

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}\vec{E} \sim \frac{E}{\ell} \qquad \text{donc} \qquad E \sim \frac{\ell\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Ainsi, on peut comparer les termes de l'équation de Maxwell-Faraday dans le cadre de l'ARQS

$$\frac{\left|\mu_0\vec{j}\right|}{\left|\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right|} \sim \frac{\mu_0 j\tau}{\mu_0\varepsilon_0 E} \sim \frac{j\tau}{\rho\ell} \gg \frac{j}{\rho c}\,.$$

De plus, comparons les termes de l'équation de conservation de la charge

$$\frac{|\operatorname{div}\vec{j}\,|}{\left|\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right|} \sim \frac{j\tau}{\rho\ell} \gg \frac{j}{\rho c}\,.$$

Propriété. Dans le cadre l'**approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique** (ARQS magnétique), le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.
Cette approximation est vraie lorsque les courants dominent les charges soit $\rho c \ll j$.
Les équations de Maxwell deviennent alors

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\,, \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}\,.$$

et le vecteur densité de courant devient à flux conservatif $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

Cette simplification est adaptée pour décrire les phénomènes d'induction. Dans ce régime, le champ magnétique a une expression similaire à celle obtenue en magnétostatique car le théorème d'Ampère est vérifié.

Cas particulier des conducteurs : Dans le cas d'un milieu ohmique en régime harmonique, la conductivité à fréquence finie vaut (cf. chapitres EM2 sur les sources du champ électromagnétique) $\underline{\sigma}(\omega) = \dfrac{\sigma}{\mathrm{j}\omega\tau + 1}$, où $\tau \simeq 10^{-14}\,\mathrm{s}$ et $\sigma_0 \simeq 10^7\,\mathrm{S/m}$ dans un bon conducteur comme le cuivre. On a alors, en ordre de grandeur $|j| = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}|E|$ par la loi d'Ohm locale et $|j_D| = \varepsilon_0\omega|E|$.

À basses fréquences, soit $\omega \ll 1/\tau \simeq 10^{14}\,\mathrm{rad/s}$, la condition $j_D \ll j$ implique $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0 \simeq 10^{18}\,\mathrm{rad/s}$ qui est automatiquement vérifié.

Plaçons nous donc à hautes fréquences, soit $\omega \gg 1/\tau \simeq 10^{14}\,\mathrm{rad/s}$. Dans ce cas, on a

$$|j| = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}|E| \approx \frac{\sigma_0}{\omega\tau}|E|\,.$$

Ainsi, dans un conducteur comme le cuivre, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction à condition que

$$\omega \ll \sqrt{\frac{\sigma_0}{\tau\varepsilon_0}} \simeq 10^{16}\,\mathrm{rad/s}\,.$$

Ainsi, l'étude d'un circuit dans le cadre de l'ARQS magnétique est naturelle dans les conducteurs car elle est naturellement vérifiée dans les conditions de pulsations usuelles.

Il est à noter que la propriété $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ est une propriété essentielle de l'électrocinétique. En effet, elle implique que les charges ne s'accumulent pas localement. Cette propriété est essentielle pour la loi de mailles.

2 L'énergie électromagnétique

2.1 Bilan local d'énergie

Nous souhaitons réaliser un bilan d'énergie du champ électromagnétique. Pour cela, on rappelle tout d'abord ce que nous avons vu au chapitre EM2 concernant la puissance cédée aux charges libres. En effet, on a la puissance infinitésimale transmise aux charges $\mathrm{d}\mathcal{P}$ par le travail de la force de Lorentz à toutes ces charges vaut alors

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = (\vec{F}\cdot\vec{v})\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V = \vec{E}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}V\ .$$

La puissance volumique p_{L} transmise à la matière par un champ $\vec{E}$ vaut $p_{\mathrm{L}} = \vec{j}\cdot\vec{E}$. De plus, comme la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas, il s'agit de la seule puissance transmise à la matière.

Pour faire apparaître ce terme, il est nécessaire de réaliser un produit scalaire entre $\vec{E}$ et l'équation de Maxwell-Ampère (1.2). Il vient

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}\right)\ .$$

Pour obtenir un terme symétrique, effectuons le produit scalaire entre $\vec{B}$ et l'équation de Maxwell-Faraday (1.4) tout en divisant par μ_0. Il vient

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,E\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)\ .$$

En retranchant ces deux équations, on obtient :

$$\vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) \tag{2.1}$$

où l'égalité finale provient d'un résultat de calcul vectoriel $\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = -\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,B + \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,A$.

Définition. La **densité volumique d'énergie du champ électromagnétique** w s'écrit

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}}\ .$$

Elle représente l'énergie portée par le champ par unité de volume ($\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-3}$).
Le **vecteur de Poynting** $\vec{\Pi}$ s'écrit

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}}\ .$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface donne la puissance rayonnée à travers celle-ci. Son unité est le $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

L'énergie portée par un rayon lumineux ou rayonnée par le Soleil correspond donc au flux de vecteur. En particulier en optique, l'intensité lumineuse correspond à la mesure locale du flux du vecteur de Poynting.

> ***Remarque :*** *Le vecteur de Poynting est défini à partir de l'équation* (2.1). *Il n'intervient donc qu'à travers sa divergence (ou son flux, en version intégrale). Il est donc défini à un rotationnel près.*

Propriété. L'équation locale de conservation de l'énergie du champ électromagnétique (connue sous le nom d'identité locale de Poynting) s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}}\ .$$

Le terme $-\vec{j}\cdot\vec{E}$ traduit la puissance par unité de volume cédée par le champ à la matière.

Ce bilan d'énergie peut s'écrire sous forme intégrale, en notant U l'énergie stockée par le champ dans un volume V de surface de contour fermée S, il vient

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V - \oiint_S \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

où on a utilisé la formule de Green-Ostrogradski.

2.2 Applications

2.2.1 Le condensateur plan

Considérons un condensateur plan constitué de deux plans de surface S (considérée comme très grande) parallèles chargés en surface séparés de la distance e. Un plan est chargé avec une densité surfacique σ et l'autre avec $-\sigma$ de sorte que la charge totale du système est nulle.

Comme vu dans le chapitre EM3, le champ électrique est nul à l'extérieur des armatures et vaut $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ entre elles. Le champ magnétique est nul.

De plus, par un calcul direct en calculant la circulant de ce champ ou en réutilisant les potentiels de la partie précédente, on en déduit

$$U = V_+ - V_- = V\left(-\frac{e}{2}\right) - V\left(\frac{e}{2}\right) = -\int_{-e/2}^{e/2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}\,.$$

On a donc $U = eE$.

La densité d'énergie électromagnétique est donc $w = \dfrac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \dfrac{\varepsilon_0}{2e^2}U^2$. Pour obtenir l'énergie totale stockée, il est nécessaire de multiplier par le volume soit $\mathcal{E} = wSe = \dfrac{1}{2}\dfrac{S\varepsilon_0}{e}U^2$.

On rappelle que la capacité de ce condensateur vaut $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$. On retrouve ainsi que l'énergie stockée dans le champ électromagnétique vaut $\dfrac{1}{2}CU^2$.

2.2.2 Le solénoïde

Considérons un solénoïde de N spires de surface S de longueur ℓ (supposée très grande) parcouru par un courant I constant et uniforme.

Comme vu au chapitre EM4, le champ magnétique est admis nul en dehors du solénoïde et le champ intérieur vaut $B = \mu_0\dfrac{N}{\ell}I$. Le champ électrique est nul.

La densité d'énergie électromagnétique est donc $w = \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2}\mu_0\dfrac{N^2}{\ell^2}I^2$. Pour obtenir l'énergie stockée, il est nécessaire de multiplier par le volume soit $\mathcal{E} = wS\ell = \dfrac{1}{2}\mu_0\dfrac{N^2 S}{\ell}I^2$.

On rappelle que l'inductance de cette bobine vaut $L = \mu_0\dfrac{N^2 S}{\ell}$. On retrouve ainsi que l'énergie stockée dans le champ électromagnétique vaut $\dfrac{1}{2}LI^2$.