

## Travail demandé

à rendre le 14/11/2025

Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

**Problème I - Étude des bobines utilisées dans un couplage inductif non résonnant***Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique E3A PSI 2020.*

Pour établir un couplage inductif non résonnant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



FIGURE 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur  $\ell$  et d'axe de révolution  $Oz$ , comportant  $N$  spires circulaires jointives de rayon  $a$ , et parcourues par un courant d'intensité variable  $i(t)$ . On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables  $i(t)$ , comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

**A1.** Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique  $\vec{B}$ . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS ?

**A2.** Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

**A3.** Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime ?

**A4.** En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ  $\vec{B}(M)$ , ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

**A5.** En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de  $\ell$ ,  $N$  et  $i(t)$ .

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de  $N$  spires circulaires identiques, d'axe de révolution  $Oz$  et de rayon  $a$ , placées dans le plan  $z = 0$  et parcourues par un courant d'intensité  $i(t)$ . On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point  $M$  de l'axe  $Oz$ , de cote  $z > 0$ .

**A6.** Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  au point  $M$ .

**A7.** Que dire du plan d'équation  $z = 0$  d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre  $B_z(-z)$  et  $B_z(z)$ .

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine « plate » au point  $M$  :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 Ni(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

**A8.** Représenter l'allure de la fonction  $B_z(z)$ . Exprimer le champ magnétique maximal  $B_{z,\max}$ , et déterminer à quelle distance  $z_{1/2}$  de la spire le champ magnétique vaut  $B_{z,\max}/2$ , en fonction de  $a$ .

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).

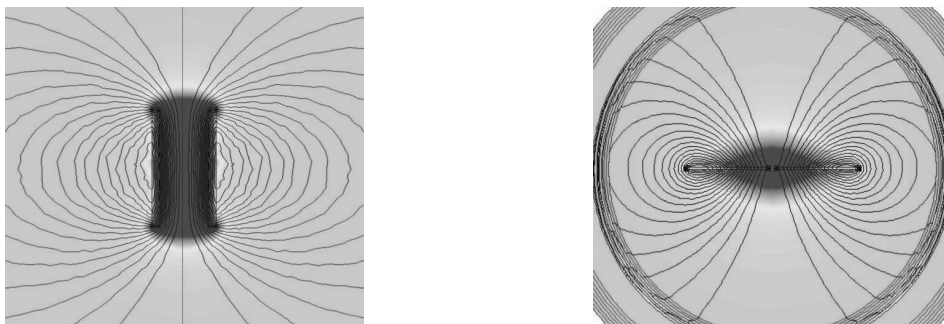


FIGURE 5 – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

**A9.** Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

**A10.** Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ  $\vec{B}$ , permet de le confirmer ?

## Problème II - Le crissement

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCMP 2 MPI 2024.

### III.A Les lois de Coulomb

Les crissements et grincements qui caractérisent certains frottements sont des oscillations de relaxation. La fréquence des relaxations est aussi celle de l'onde sonore émise, qui est souvent désagréable à entendre, notamment à cause de sa position dans la gamme des sons aigus. Nous allons en donner une description très simplifiée, dans le cadre des lois, dites de Coulomb, qui régissent le frottement de glissement d'un solide ( $\Sigma$ ) en translation relativement à un support fixe ( $F$ ).

Nous supposons ici l'existence (figure 7) d'une surface de contact plane entre ( $\Sigma$ ) et ( $F$ ).

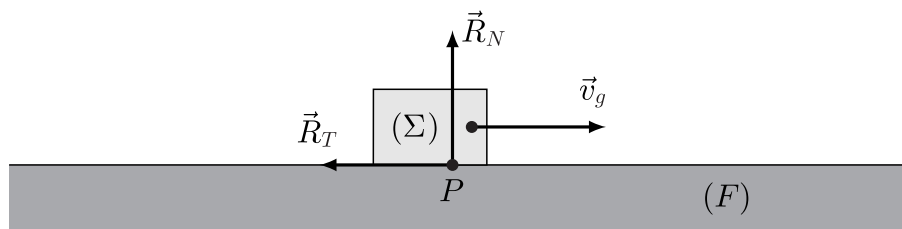


FIGURE 7 – Lois de Coulomb du frottement de glissement

Ces lois décrivent la force de contact  $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$  exercée par le support ( $F$ ) sur le solide ( $\Sigma$ ). Il s'agit d'une force exercée en un point  $P$  de la surface de contact des deux solides ; elle peut être décomposée en une partie  $\vec{R}_T$  colinéaire à la surface de contact des deux solides et une autre  $\vec{R}_N$  perpendiculaire à celle-ci.

Les lois de Coulomb distinguent deux situations :

- Lorsque ( $\Sigma$ ) est *en mouvement* à la vitesse  $\vec{v}_g$  (dite vitesse de glissement),  $\vec{R}_T$  est colinéaire à  $\vec{v}_g$ , de sens inverse et de norme proportionnelle à celle de  $\vec{R}_N$ ,  $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$ , où le coefficient  $f_d > 0$  porte le nom de *coefficient de frottement dynamique* ; il reste constant pendant tout le mouvement et ne dépend que de l'état de surface des deux solides en contact.
- Lorsque le mouvement de ( $\Sigma$ ) cesse,  $\vec{v}_g = \vec{0}$  et la composante tangentielle vérifie nécessairement la condition  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$  où le coefficient  $f_s$  porte le nom de *coefficient de frottement statique* ; lui aussi ne dépend que de l'état de surface des solides.

### III.B Le modèle de crissement

Lorsqu'on appuie une craie sur un tableau noir avant de la déplacer, on entend parfois distinctement le bruit du crissement lors du déplacement de la craie. Pour étudier cette situation, on modélise (figure 8) la craie et son appui par un solide rectangulaire ( $\Sigma$ ) de masse  $M$  attaché à un ressort ; le tableau noir par un support fixe ( $F$ ) confondu avec le plan horizontal ( $Oxy$ ) ; le déplacement, par le mouvement à vitesse constante  $v_0$  de l'extrémité  $A$  du ressort élastique de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ .

Le ressort reste constamment parallèle à l'axe ( $Ox$ ), à  $t = 0$  il est à sa longueur naturelle  $\ell_0$ .

L'autre extrémité du ressort, notée  $H$ , est liée au mobile ( $\Sigma$ ) ; c'est sa vitesse que l'on souhaite étudier. À l'instant  $t = 0$ , on a  $x_H(0) = -\ell_0$ .

On note enfin  $f_s > f_d$  les coefficients de frottement statique et dynamique de la craie sur le tableau et  $g = \|\vec{g}\|$  l'accélération de la pesanteur.

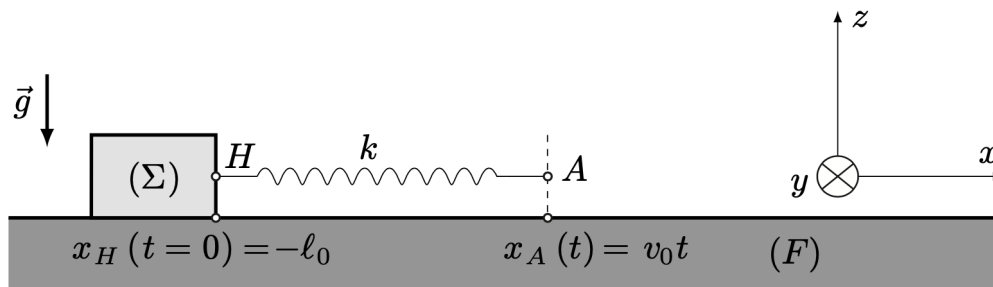


FIGURE 8 – Un modèle pour le crissement

- – 18. Exprimer la force de traction exercée par le ressort sur le mobile en fonction de  $k$ ,  $v_0$ ,  $t$  et de  $X_H(t) = x_H(t) + \ell_0$ .  
Exprimer aussi la composante normale  $\vec{R}_N$  de la force de contact exercée sur la craie.
- – 19. En déduire qu'à partir de  $t = 0$  la craie reste immobile jusqu'à l'instant  $t = t_0$  que l'on déterminera en fonction de  $f_s$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $k$  et  $v_0$ .
- – 20. On pose  $\tau = t - t_0$ . Préciser les valeurs de  $x_A$ , de  $X_H$  et de sa dérivée  $V_H = \frac{dX_H}{d\tau}$  à l'instant  $\tau = 0$  avant d'explicitier l'équation différentielle vérifiée par  $X_H(\tau)$  sous la forme :

$$\frac{d^2 X_H}{d\tau^2} + \omega^2 X_H = \omega^2 v_0 \tau + \gamma$$

où l'on exprimera les constantes  $\omega$  et  $\gamma$  en fonction de  $k$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $f_s$  et  $f_d$ .

### III.C Étude du mouvement de crissement

La suite du mouvement du mobile se poursuit en alternant les étapes d'immobilité et de glissement ; le mouvement ainsi observé est périodique de pulsation  $\Omega$  et il est la cause du bruit de crissement, par exemple, de la craie sur un tableau.

On pourra se reporter au formulaire donné à la fin de cette partie.

- – 21. Déterminer les expressions de  $X_H(\tau)$  et  $V_H(\tau)$  en fonction de  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $\omega$  et  $\alpha = \frac{\gamma}{\omega v_0}$ .  
On note  $\tau_{\max}$  le premier instant où  $V_H$  atteint sa valeur maximale  $V_{\max}$  et  $\theta_{\max} = \omega \tau_{\max}$ .
- – 22. Sans nécessairement exprimer  $\tau_{\max}$ , déterminer les expressions de  $\cos(\theta_{\max})$  et  $\sin(\theta_{\max})$  en fonction de  $\alpha$ . En déduire que  $V_{\max} = v_0 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2}\right)$ .  
Tracer l'allure de la courbe donnant  $V_H(\tau)$  puis montrer alors que cette vitesse s'annule à nouveau à un instant  $\tau_1 > 0$  correspondant à l'angle  $\theta_1 = \omega \tau_1$  dont on exprimera le cosinus et le sinus en fonction de  $\alpha$ . On admettra dans la suite que  $0 < \alpha < 1$ .

La première mise en mouvement du mobile  $(\Sigma)$  correspond à l'intervalle  $0 \leq \tau \leq \tau_1$ . À l'issue de cette phase, il s'immobilise alors pendant un laps de temps avant de redémarrer par la suite. On rappelle que longueur du ressort est donnée à chaque instant par  $\ell = x_A - x_H$ .

- – 23. Déterminer l'expression de  $\ell(\tau)$  et en déduire la longueur du ressort  $\ell(0)$  à l'instant  $\tau = 0$ .  
Montrer qu'à l'instant  $\tau_1$  elle est devenue  $\ell(\tau_1) = \ell(0) - 2\alpha v_0 / \omega$ .  
En déduire la durée  $\tau_2$  qui devra alors s'écouler avant que le mobile se remette en mouvement. Compléter alors le tracé de la question précédente en faisant apparaître une période  $T$  complète du mouvement du mobile ; préciser sur ce schéma dans quelle phase du mouvement il y a *augmentation continue d'une contrainte* et dans quelle phase il y a *relâchement subit* de celle-ci.

Exprimer  $\Omega$  en fonction de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  puis en fonction de  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\theta_1$ .

- – 24. Pour estimer les ordres de grandeur du phénomène, on prend  $\theta_{\max} = 5\pi/6$  avec un frottement caractérisé par  $f_s \simeq 1$  et  $f_d \simeq 0,6$  pour une vitesse de traction du ressort  $v_0 = 1 \text{ cm/s}$ . On prendra  $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ . En déduire les valeurs numériques de  $\alpha$ , puis de  $\Omega$ .  
Quel lien existe-t-il entre cette pulsation et celle du son émis ?  
Préciser et justifier le domaine fréquentiel du crissement.

### Formulaire et données numériques

On donne  $\ln(2) = 0,7$  et  $\ln(3) = 1,1$ .

Si  $t = \tan \theta$  alors  $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$  et  $\sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}$ .

On rappelle par ailleurs que  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  et  $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$ .

On pourra prendre  $\sqrt{3} \simeq 1,73$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$ ,  $\pi \simeq 3,14$  et  $2/\pi \simeq 0,64$  ;

## Problème III - Trajectoire des plombs d'une cartouche

*Ce sujet est inspiré du sujet CCP MP 2017.*

### Données :

- ▷ On suppose l'accélération de la pesanteur égale à  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  avec  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  ;
- ▷ Le référentiel terrestre est supposé galiléen. ;
- ▷ Masse volumique du plomb solide :  $\rho = 11\,350 \text{ kg/m}^3$ .
- ▷ Masse volumique de l'air :  $\rho_a = 1.23 \text{ kg/m}^3$  ;

Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut  $v_0 = 380 \text{ m/s}$ .

### Document 1 :

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés « plombs » quelle que soit leur nature). La photographie ci-dessous est celle d'une cartouche en partie dénudée.



La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même dis-

tance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs  $\times 100 =$  zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm :  $3 \times 100 = 300 \text{ m}$

Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous allons vérifier ces affirmations.

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

### III.1. Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v} .$$

où  $v$  est la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du projectile,  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air,  $S = \pi R^2$  est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et  $C_D$  est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles,  $C_D$  est de l'ordre de 0.44.

**III.1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse  $\vec{v}$  de la masse du plomb de masse  $m$  .

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de traînée aérodynamique.

### III.2. Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

**III.2.** Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale  $v_0$ , obéissant à l'inégalité  $v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$ .

Par la suite on notera  $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$ .

**III.3.** Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne (figure 1). On note  $\theta$  l'angle de la vitesse  $\vec{v}$  avec le plan horizontal et  $\theta_0$  sa valeur à l'instant initial.

On prend un repère tel que  $\vec{v}_0 = v_0 (\cos \theta_0 \vec{e}_x + \sin \theta_0 \vec{e}_z)$  et dont l'origine  $O$  est la position de la particule à l'instant initial.

**III.4.** Établir les expressions des vecteurs vitesse et position en fonction du temps.

**III.5.** Donner l'équation de cette trajectoire et donner sa nature mathématique.

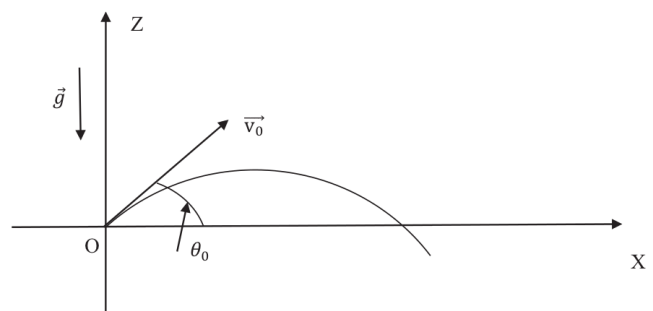


Fig. 1 – Trajectoire

**III.6.** Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ( $Z = 0$ ), vaut

$$X_m = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut

$$H_m = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}.$$

On rappelle que  $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ .

**III.7.** Donner la valeur de l'angle  $\theta_0$  pour laquelle la portée est maximale.

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres de 0.25 mm par numéro. Une cartouche de n° 8 possède des plombs plus petits qu'une de n° 4. Le tableau 1 ci-dessous donne les rayons de quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-contre pour une vitesse initiale  $v_0 = 380$  m/s.

N° du plomb	1	5	10
Rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse $m$ (g)	0,38	0,16	0,031
Portée $X_m(\theta_0)$ (km)	15	15	15
Hauteur $H_m$ (km)	3,7	3,7	3,7
$v_\infty$ (m/s)	33	29	22

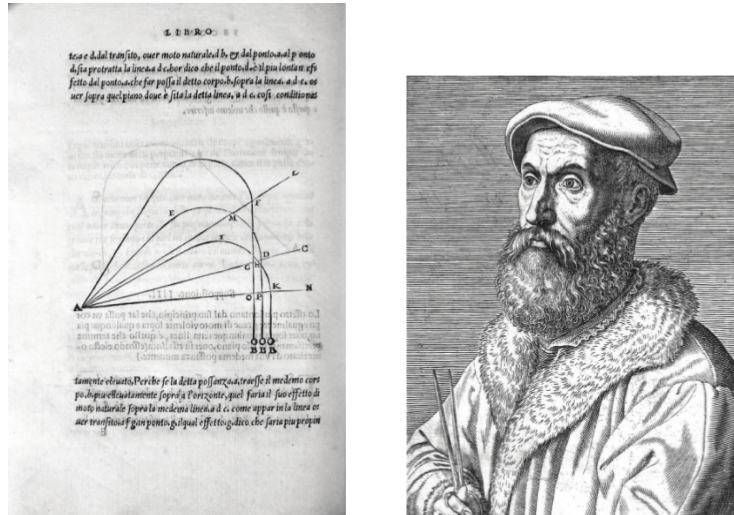
Tab. 1 – Valeurs numériques

**III.8.** Comparer la portée maximale à la portée donnée dans le document 1 et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

### III.3. Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

On vient de voir dans l'étude précédente que, pour les plombs de chasse,  $v_0$  est très supérieure à  $v_\infty$ .

Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI<sup>ème</sup> siècle, portrait ci-dessous), qui a décrit les trajectoires (extrait ci-dessous) d'un boulet de canon.



#### III.3.a. Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit  $OX'$  la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note  $x'$  l'abscisse du point  $M$  sur cette droite qui fait un angle  $\theta_0$  avec  $OX$  et  $\vec{v}$  sa vitesse (figure 2).

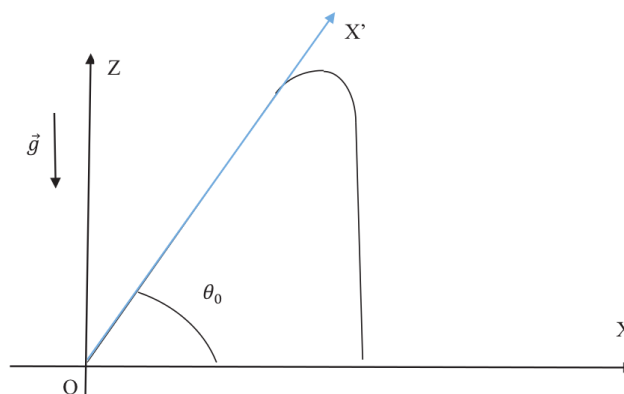


Fig. 2 – Trajectoire de Tartaglia

**III.9.** Montrer qu'au début du mouvement, le poids d'un plomb est négligeable devant la force de traînée.

**III.10.** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse en fonction de la position  $X'$  s'écrit

$$\frac{d\vec{v}(x')}{dx'} = -\frac{g}{v_\infty^2} \vec{v}(x') = -\frac{1}{D} \vec{v}(x').$$

On peut remarquer que le vecteur vitesse s'écrit simplement  $\vec{v}(x') = v(x') \vec{e}_{X'}$ .

**III.11.** Quelle est la dimension de  $D$  ?

**III.12.** Établir l'expression de  $\vec{v}$  en fonction de  $x'$ . Que représente le paramètre  $D$  ?

On note  $d$  la distance que doit parcourir le plomb pour atteindre une vitesse  $10v_\infty$ ,  $v_u$  la vitesse atteinte quand le plomb a parcouru 40 m et  $\mathcal{E}_c$  l'énergie cinétique correspondante. Le tableau 2 ci-dessous donne pour trois numéros de plomb des résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-contre pour une vitesse initiale  $v_0 = 380$  m/s.

N° du plomb	1	5	10
$D$ (m)	110	86	50
$v_0/v_\infty$	11	13	17
$d$ (m)	15,5	23	27
$v_u$ (m/s)	270	240	170
$\mathcal{E}_c$ (J)	13,5	4,6	0,45

**Tab. 2** – Valeurs numériques

**III.13.** Comment définiriez-vous la portée utile d'un tir ?

On lit dans les journaux de chasse que le caractère mortel du tir vient en première approximation du fait que les plombs qui pénètrent dans le gibier communiquent à l'animal leur énergie cinétique créant ainsi une onde de choc fatale.

**III.14.** En supposant qu'il suffit de 2 plombs numéro 1 pour avoir un canard à son tableau de chasse, de combien de plombs 5 et 10 suffirait-il ?

**III.15.** Pourquoi faut-il prendre des billes plus grosses en fer doux, sachant qu'il s'agit d'un acier de masse volumique  $\rho' = 7600$  kg/m<sup>3</sup> ? Quel est le danger lié à l'agglutination de la grenaille ?

### III.3.b. Deuxième phase : la phase intermédiaire

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

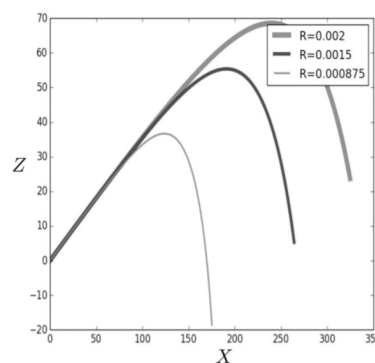
**III.16.** Pourquoi qualifie-t-on cette phase de « phase gravitaire » ?

On peut établir par un calcul formel, à partir de l'équation du mouvement, l'expression approchée de la portée maximale du projectile pour ce type de trajectoire :

$$x_M = \frac{D \cos \theta_0}{2} \ln \left[ 1 + 4 \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin(\theta_0) \right] = H \cotan(\theta_0).$$

Pour  $\theta_0 = 16^\circ$ , on obtient numériquement une portée de 264 m pour le plomb n° 1 ; 217 m pour le plomb n° 5 et 139 m pour le plomb n° 10.

**III.17.** Comparer aux valeurs données dans le document 1.



**Fig. 3** – Trajectoires de différents plombs

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement.

La figure 3 donne les trajectoires des plombs n° 1, 5 et 10 de vitesse initiale 380 m/s, pour l'angle  $\theta_0$  optimisant la portée maximale. Les valeurs des coordonnées et des rayons sont en mètres.

### III.3.c. Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

**III.18.** À quel type de mouvements physique correspond cette phase ?

**III.19.** Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

$$\vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\pi R^2 C_D}} (-\vec{e}_z).$$

**III.20.** Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.