

## Sujet MPI - Le devoir dure 4h.

La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

## Problème I - Le soleil a rendez-vous avec la pluie

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCINP MPI 2023.

### Partie VI - Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre  $D$  et d'indice de réfraction  $n$ . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la **figure 7**.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence  $i$  (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note  $r$  l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence  $i$ .

L'indice de l'air vaut  $n_{\text{air}} = 1$ .

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (**figure 7**) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

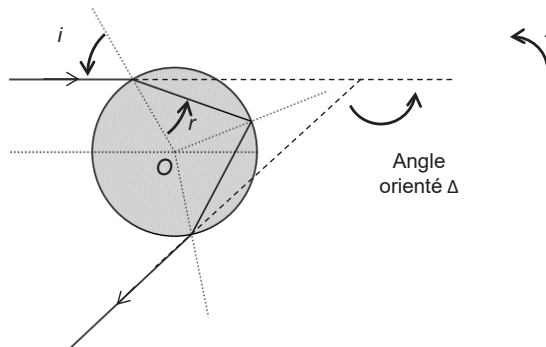


Figure 7 - Cas d'une réflexion et de deux réfractions

**Q23.** Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $r$ .

**Q24.** La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté  $\Delta$  (**figure 7**).

Montrer que :  $\Delta = \pi - 4r + 2i$ .

Exprimer l'angle  $\Delta$  en fonction de  $n$  et de  $x = \sin(i)$ .

**Q25.** Montrer que  $\Delta(x)$  passe par un extremum lorsque  $x$  a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Donnée :  $\frac{d}{du} \text{Arcsin}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ .

**Q26.** Justifier à l'aide de la **figure 8** qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction  $\Delta_m = \Delta(x_m)$ .

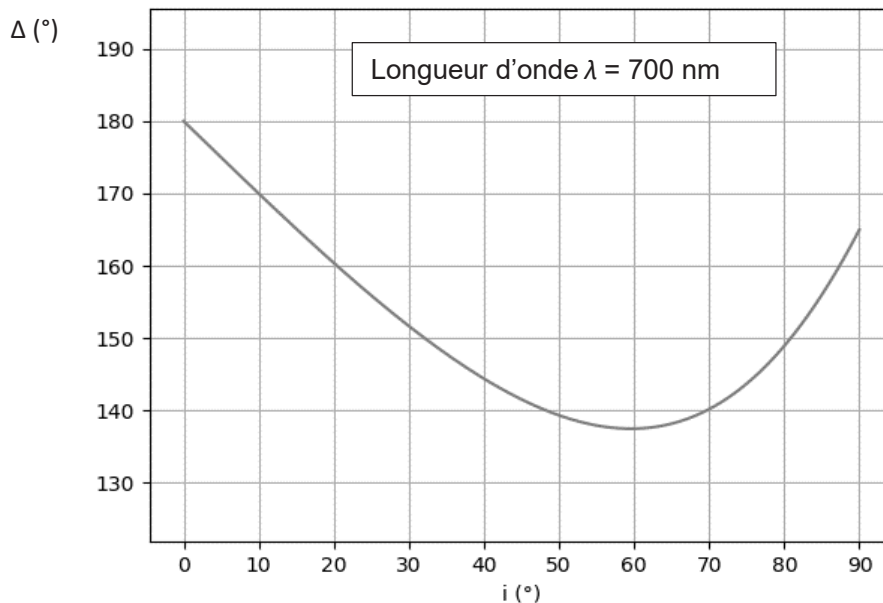


Figure 8 - Déviation en fonction de l'angle d'incidence

- Q27.** Calculer  $x_m$  et  $\Delta_m$  (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ( $\lambda = 400$  nm,  $n = 1,343$ ) et le rouge ( $\lambda = 700$  nm,  $n = 1,330$ ).
- Q28.** Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction  $\Delta_m$ . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

## Partie VII - Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel

- Q29.** Cette question a pour but de rappeler certaines conditions d'observation des interférences lumineuses.

Deux sources lumineuses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice  $n$  et interfèrent en un point  $P$  après avoir parcouru les distances  $x_1 = S_1P$  et  $x_2 = S_2P$ . On modélise les amplitudes des ondes en  $P$  par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$

$$s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec  $k_i = n \frac{\omega_i}{c}$  ( $i = 1, 2$ ),  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  constantes.

$c$  est la célérité de la lumière dans le vide.

- a) Donner un ordre de grandeur de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour la lumière visible.

b) L'intensité lumineuse  $I(P)$  observée à l'œil nu en  $P$  est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en  $P$ , soit :  $I(P) = K \langle s^2(P, t) \rangle_\tau$ . Sur quelle durée  $\tau$  cette valeur moyenne est-elle calculée ?

c) Calculer l'intensité  $I(P)$  et montrer qu'elle s'écrit :  $I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$ .

À quelle(s) condition(s) le terme  $I_{12}(P)$  est-il non nul ?

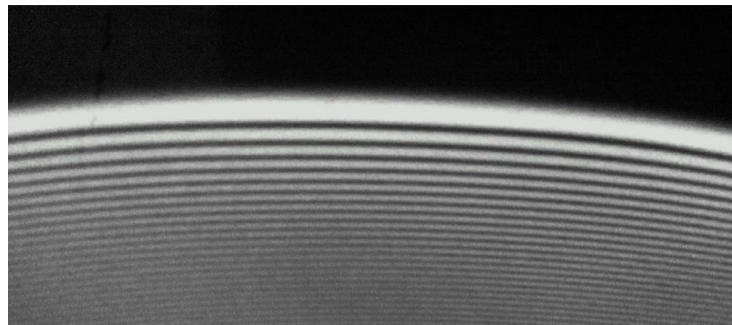
Donnée :  $\cos(a)\cos(b) = 1/2[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

d) On suppose dans la suite que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  et  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Montrer que l'intensité en  $P$  s'écrit  $I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(P)\right)$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide. La grandeur  $\delta(P)$  sera exprimée en fonction de l'indice  $n$  du milieu, de  $x_1$  et de  $x_2$ .

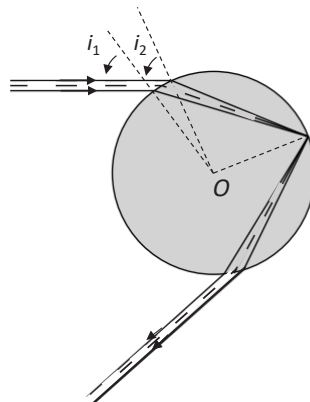
Il est possible (**photo 5**) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits " surnuméraires ".



**Photo 5** - Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau

**Q30.** Représenter la courbe  $I(P)$  en fonction de  $\delta(P)$ . En observant la **photo 5**, que peut-on dire de  $I_1$  et  $I_2$  ?

On considère (**figure 9**) deux rayons d'incidences  $i_1$  et  $i_2$ , voisins du rayon d'incidence  $i_m$  (en pointillés) sur une goutte d'eau, se réfléchissant une seule fois à l'intérieur de la goutte d'eau et émergeant dans des directions parallèles.



**Figure 9** - Rayons responsables des interférences

**Q31.** Où ces rayons interfèrent-ils ?

**Q32.** On admet que la différence de marche en un point  $P$  du champ d'interférences s'écrit :

$$\delta(P) = D(\cos(i_2) - \cos(i_1)) - 2Dn(\cos(r_2) - \cos(r_1)).$$

Exprimer la condition permettant d'observer des interférences constructives. L'écart angulaire entre les franges est-il plus grand pour les petites ou les grosses gouttes ? Justifier qualitativement.

**Q33.** Les rayons incidents d'angles d'incidence  $i_1 = 50,13^\circ$  et  $i_2 = 67,98^\circ$  donnent pour une radiation rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $n = 1,330$ ) des rayons émergents parallèles.

Quel diamètre de goutte permettra d'observer la frange claire d'ordre  $-2$  dans la direction des rayons émergents ?

## Problème II - Mesure de la vitesse d'un fluide

Ce sujet est un extrait du sujet CCINP TPC 2025.

### III.2 - Vélométrie optique

La vitesse d'un fluide peut aussi se mesurer par une méthode interférentielle. En faisant traverser un fluide contenant des particules réfléchissantes à travers un système de franges, celles-ci passent alternativement par les franges brillantes et sombres. La lumière réfléchie est alors captée par un photodétecteur permettant la mesure de la durée mise par une particule réfléchissante pour parcourir un interfrange. On a alors accès à la vitesse du fluide.

#### III.2.1 - Utilisation de trous d'Young

Dans le montage des trous d'Young, chaque trou suffisamment petit diffracte le faisceau de lumière incident. En sortie, le faisceau diverge avec un demi-angle au sommet  $\theta$  identique pour les deux trous. On place un écran au foyer image d'une lentille  $L_2$ .

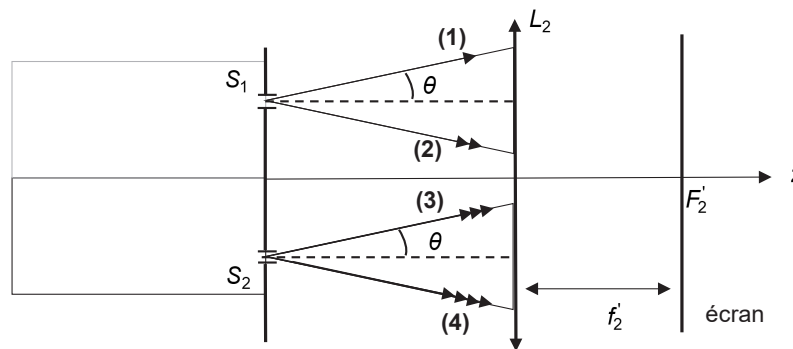


Figure 9 - Diffraction par deux trous d'Young

**Q28.** Représenter sur le **DR** les rayons émergents atteignant l'écran et issus des rayons incidents (1), (2), (3) et (4).

**Q29.** Faire alors apparaître sur ce schéma la largeur  $\ell$  du champ d'interférences sur l'écran. Montrer que dans les conditions de Gauss, que l'on rappellera, cette largeur peut s'écrire :

$$\ell \simeq 2f'_2\theta$$

Pour produire le faisceau de lumière incident, on place une source ponctuelle  $S$  sur le foyer objet d'une lentille convergente  $L_1$ . Un point  $M$  sur l'écran sera repéré par son abscisse  $x$  (figure 10).

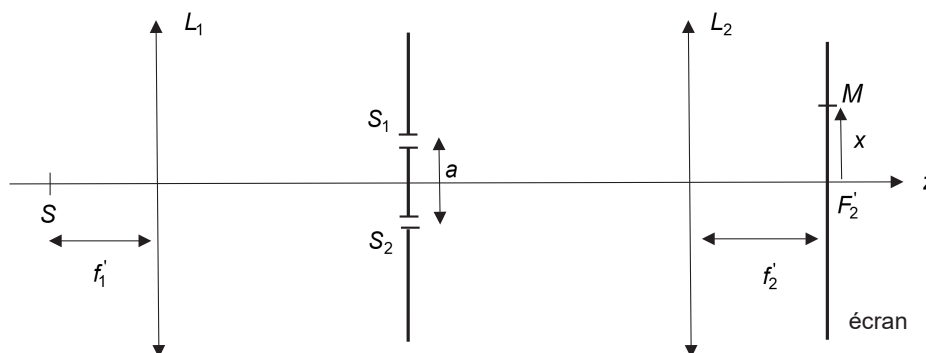


Figure 10 - Montage à l'infini des trous d'Young

**Q30.** Un tel montage permet de produire un faisceau de lumière parallèle. Quel instrument d'optique, utilisé notamment dans un goniomètre, réalise une telle opération ?

**Q31.** Compléter le **DR** en traçant deux rayons lumineux partant de  $S$  pour aller à  $M$ , l'un passant par  $S_1$  et l'autre par  $S_2$ .

**Q32.** Faire apparaître sur le schéma précédent (**DR**) l'allure d'au moins deux surfaces d'onde :

- entre  $S$  et  $L_1$  ;
- entre  $L_1$  et les fentes d'Young ;
- entre les fentes d'Young et  $L_2$  ;
- entre  $L_2$  et  $M$ .

Quel théorème est utilisé ici pour tracer ces surfaces d'onde ?

Dans le vide, l'onde émise par la source est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ .

**Q33.** Déterminer la différence de marche  $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ . En déduire l'expression de l'ordre d'interférences  $p(M)$  en fonction de  $a$ ,  $x$ ,  $\lambda_0$  et de  $f_2'$ .

**Q34.** Définir et déterminer l'expression de l'interfrange  $i$ .

Les trous de rayon  $r = 10 \mu\text{m}$  sont espacés d'une distance de  $a = 50 \mu\text{m}$ .

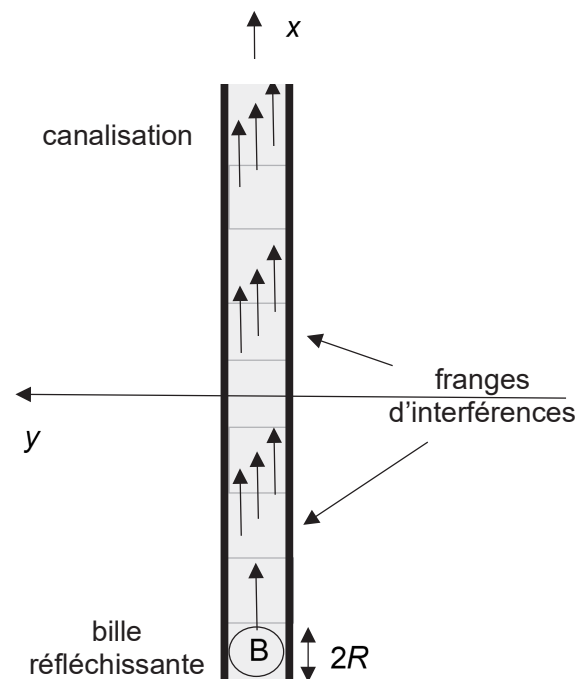
**Q35.** Sachant que le demi-angle de diffraction  $\theta$  est de l'ordre de  $\frac{\lambda_0}{2r}$ , déterminer le nombre de franges visibles sur l'écran à l'aide du résultat de la question **Q29**. L'utilisation de trous d'Young permet-elle d'obtenir une mesure précise de la vitesse d'un fluide ?

Un fluide, dont on souhaite mesurer la vitesse, circule dans une canalisation transparente le long de l'axe  $F_2'x$ , perpendiculairement au système de franges (**figure 11**). On insère dans la canalisation une bille réfléchissante qui réfléchit une partie de la lumière sur un détecteur (non représenté ici). Ce détecteur enregistre ainsi une intensité  $I' = KI(B)$ , avec  $I(B)$  l'intensité lumineuse au niveau de la bille  $B$ .

La bille  $B$  se déplace avec le fluide à la vitesse constante  $\vec{v}_B = v \vec{e}_x$ . On admet que l'expression de l'interfrange reste la même malgré la présence du fluide.

**Q36.** À quelle condition sur le rayon  $R$  de la bille l'intensité reçue par le détecteur reflète-t-elle fidèlement la figure d'interférences ? On donnera une inégalité en fonction de l'interfrange  $i$ .

**Q37.** Déterminer l'expression de la position  $x_B(t)$  de la bille en fonction de  $v$ ,  $t$  et de sa position initiale  $x_0$ .



**Figure 11** - Écoulement schématique d'un fluide au travers d'un système de franges

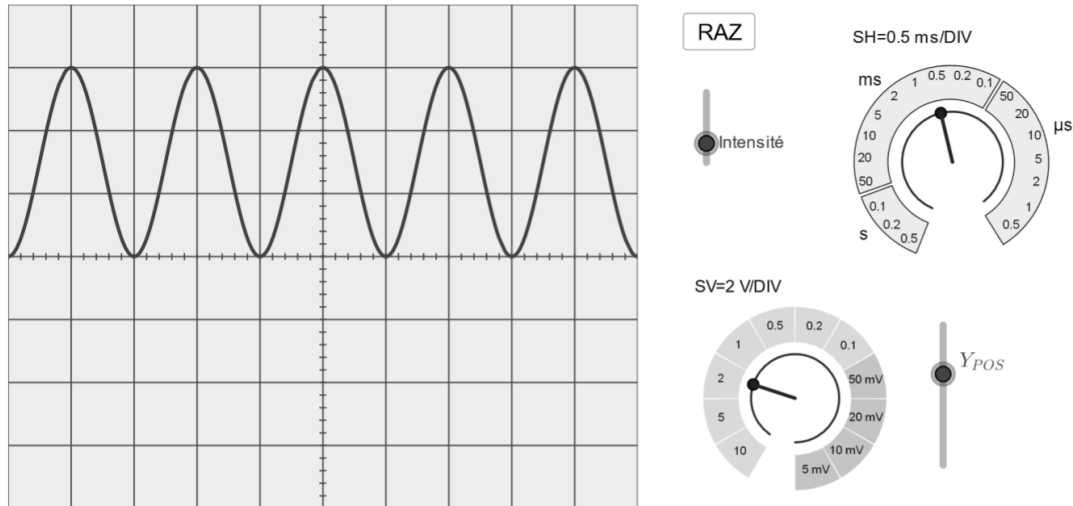
**Q38.** Montrer, à l'aide de la formule de Fresnel, que l'intensité reçue par le détecteur est de la forme :

$$I' = \frac{I_{\max}}{2} [1 + \cos(2\pi ft + \varphi)]$$

avec  $I_{\max}$  l'intensité maximale enregistrée par le détecteur.

On donnera l'expression de la fréquence  $f$  en fonction de  $v$  et de  $i$ .

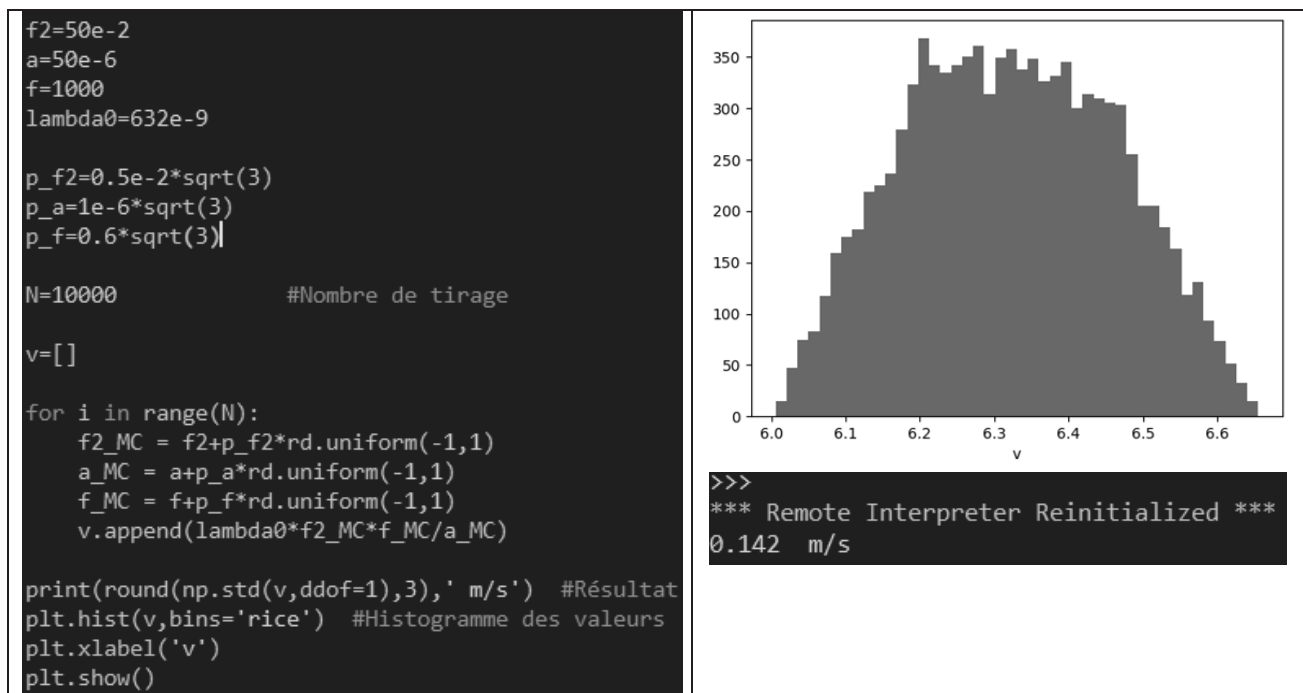
Le signal enregistré par le détecteur est donné **figure 12**.



**Figure 12** - Signal enregistré par le détecteur sur un oscilloscope

**Q39.** À l'aide de l'oscillogramme et de l'expression de l'interfrange, déterminer la valeur numérique de la vitesse  $v$  de l'écoulement sachant que pour l'expérience  $\lambda_0 = 632 \text{ nm}$ ,  $a = 50 \mu\text{m}$  et  $f_2' = 50 \text{ cm}$ .

On évalue la dispersion des mesures due à l'incertitude sur les valeurs de  $a$ ,  $f_2'$  et de  $f$  à l'aide de l'algorithme suivant :

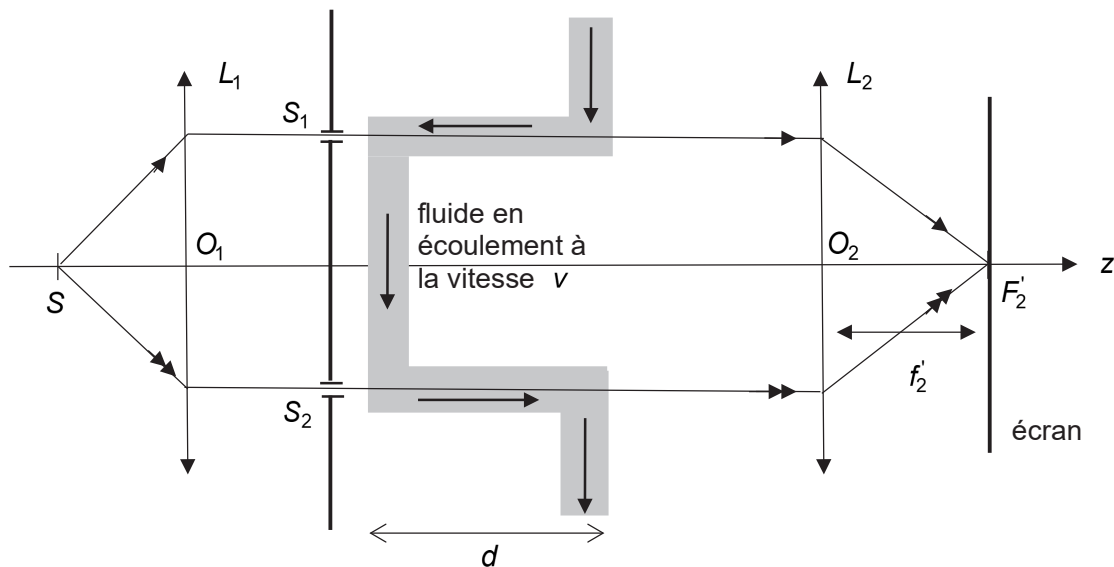


**Figure 13** - Algorithme python (à gauche) et résultat de l'exécution (à droite)

**Q40.** Quel nom porte un tel algorithme pour mesurer la dispersion d'une mesure ? Extraire du code les incertitudes-types associées à  $f'_2$ ,  $a$  et  $f$ , fréquence du signal électrique observé.

**Q41.** Donner le résultat de la vitesse du fluide  $v$  avec son incertitude-type associée  $u(v)$ . Commenter la dispersion des mesures.

En 1851, Fizeau avait mesuré la vitesse d'un fluide sans la contrainte de l'introduction de particules réfléchissantes. Son montage consistait à faire parcourir directement l'écoulement entre les trous et la lentille  $L_2$  (figure 14) et de mesurer le décalage de la figure d'interférences en  $F'_2$ .



**Figure 14** - Montage équivalent à celui de Fizeau de 1851

On admet que la vitesse de la lumière suit la loi relativiste de composition des vitesses, c'est-à-dire que sa vitesse le long du trajet de distance  $d$  est :

$$v_1 = \frac{c}{n} \frac{1 - \frac{nv}{c}}{1 - \frac{v}{nc}}$$

(pour le rayon passant par  $S_1$ )

$$v_2 = \frac{c}{n} \frac{1 + \frac{nv}{c}}{1 + \frac{v}{nc}}$$

(pour le rayon passant par  $S_2$ )

avec  $n$  l'indice du fluide en écoulement,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide et  $v$  la vitesse du fluide en écoulement ( $v \ll c$ ).

**Q42.** Montrer que la différence de temps de parcours pour atteindre  $F'_2$ , notée  $\Delta t = t_1 - t_2$ , entre les deux trajets, celui passant par  $S_1$  et celui passant par  $S_2$  s'écrit :

$$\Delta t \simeq \frac{2vd}{c^2}(n^2 - 1)$$

**Q43.** En déduire la différence de marche  $\delta(F'_2)$  (on rappelle qu'un chemin optique correspond à la distance qu'aurait parcourue la lumière si elle se propageait dans le vide pendant le même temps).

L'expérience réalisée par Fizeau consistait à observer les franges avec un fluide immobile, puis avec le fluide en mouvement.

**Q44.** Montrer que la variation de la différence de marche avec et sans écoulement s'écrit :

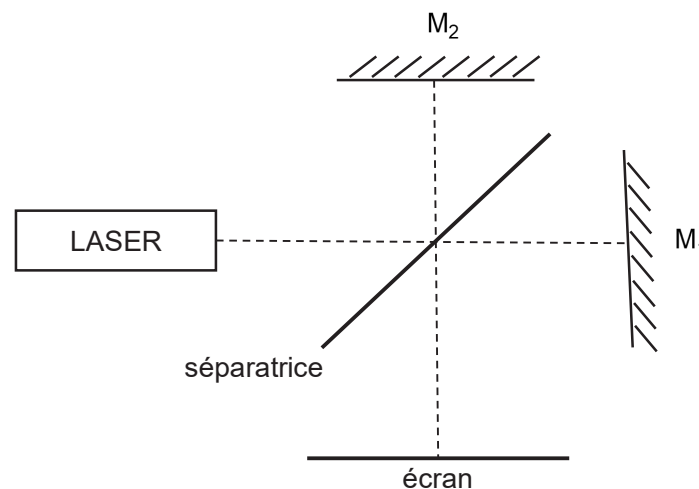
$$p_{mobile} - p_{immobile} = \frac{2vd}{\lambda_0 c} (n^2 - 1)$$

Le décalage des franges étant trop petit, Fizeau a doublé l'effet en renversant le sens de déplacement du fluide et a alors observé un décalage total d'un quart de frange.

**Q45.** En déduire la valeur de la vitesse de l'écoulement dans l'expérience de Fizeau dans laquelle les paramètres avaient pour valeur  $d = 1,5 \text{ m}$ ,  $n^2 - 1 \simeq \frac{3}{4}$  et  $\lambda_0 = 540 \text{ nm}$ . L'ordre de grandeur de la vitesse obtenue est-il cohérent avec celui de l'expérience menée avec la bille réfléchissante ?

### III.2.2 - Utilisation de l'interféromètre de Michelson

Le réseau de franges peut aussi être créé par un dispositif proche de celui de l'interféromètre de Michelson que nous détaillons ici au préalable.



**Figure 15** - Interféromètre de Michelson

L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle émise par un laser émettant un faisceau de lumière divergent de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide.

**Q46.** Donner les possibilités de réglage (translation et/ou rotation) de la séparatrice, du miroir  $M_1$  et du miroir  $M_2$ .

**Q47.** Pour une source supposée ponctuelle, est-il nécessaire de placer une lentille entre l'interféromètre et l'écran pour l'observation des franges avec un bon contraste ?

**Q48.** Pour une source étendue spatialement, où seraient localisées les franges d'interférences dans le cas d'un réglage en lame d'air ? Même question pour un réglage coin d'un interféromètre éclairé en incidence normale ?

**Q49.** Associer à chaque image ci-dessous une configuration de l'interféromètre (coin d'air ou lame d'air).

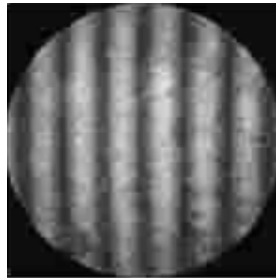


Image A

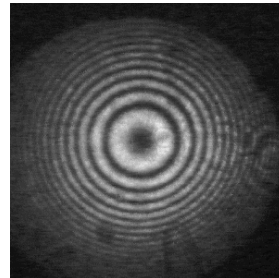
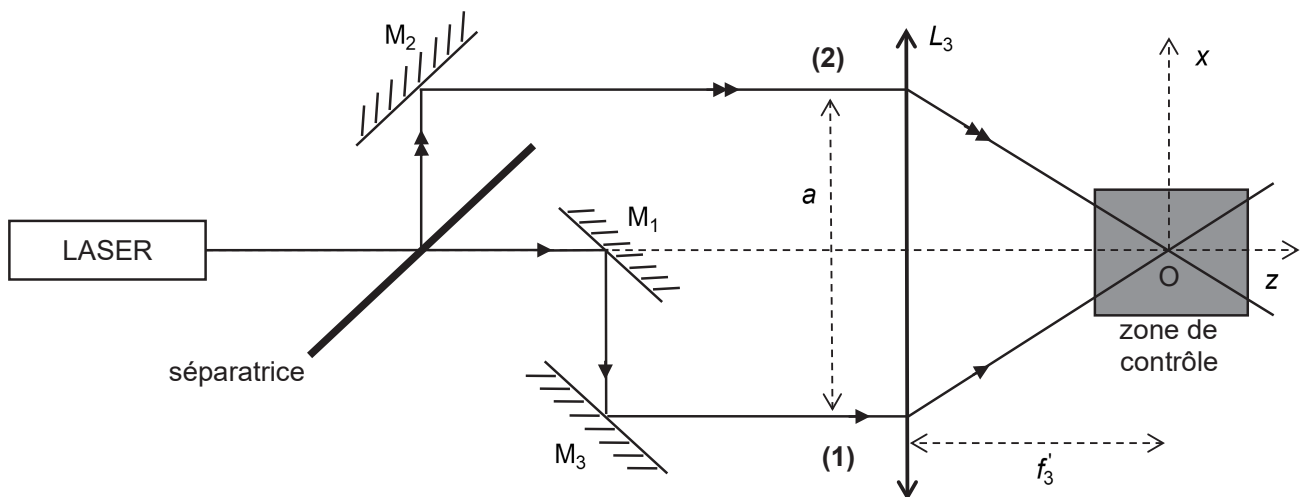


Image B

La vélocimétrie laser consiste à incliner les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  à  $45^\circ$  à partir du contact optique. On ajoute un miroir  $M_3$  afin de renvoyer le faisceau vers une lentille convergente  $L_3$  derrière laquelle le système de franges sera visible dans une zone de contrôle (**figure 16**).



**Figure 16** - Montage de vélocimétrie laser à franges

**Q50.** Au vu du positionnement relatif de  $M_1$  et de  $M_2$ , l'interféromètre est-il en configuration coin d'air ou lame d'air ?

**Q51.** Compléter le **DR** en y positionnant les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  issues de  $S$  d'où semblent provenir respectivement les rayons **(1)** et **(2)** (on pourra s'aider de sources intermédiaires en les mentionnant sur le **DR**). Conclure que le dispositif est équivalent au montage de deux trous d'Young espacés d'une distance à préciser.

## ANNEXE

### Formulaire

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- En coordonnées cartésiennes :  $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$

### Célérité

- de l'onde acoustique dans le vide :  $c_e = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- de l'onde lumineuse dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### Caractéristiques de la sonde à effet Doppler

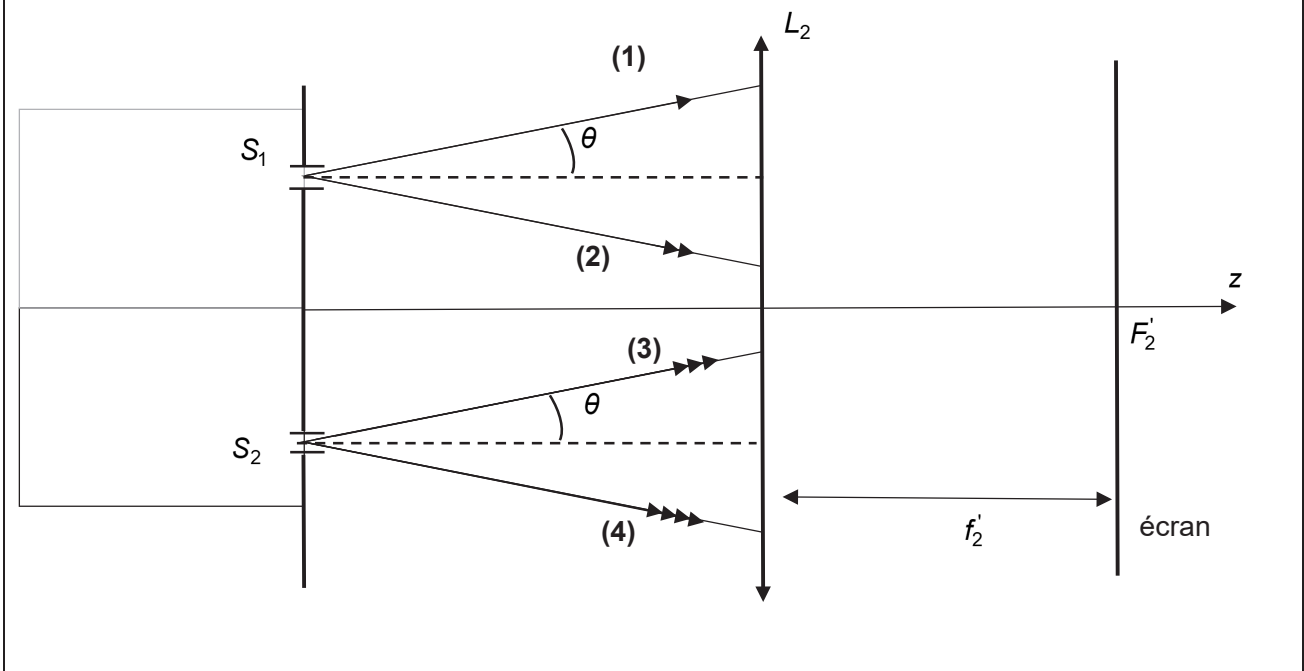
- fréquence acoustique : 10 MHz
- gamme de vitesse :  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- précision de la vitesse :  $\pm 1\%$  de la vitesse mesurée
- résolution de la vitesse :  $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- précision de la température :  $0,1^\circ\text{C}$
- résolution de la température :  $0,01^\circ\text{C}$

### Incertitude-type

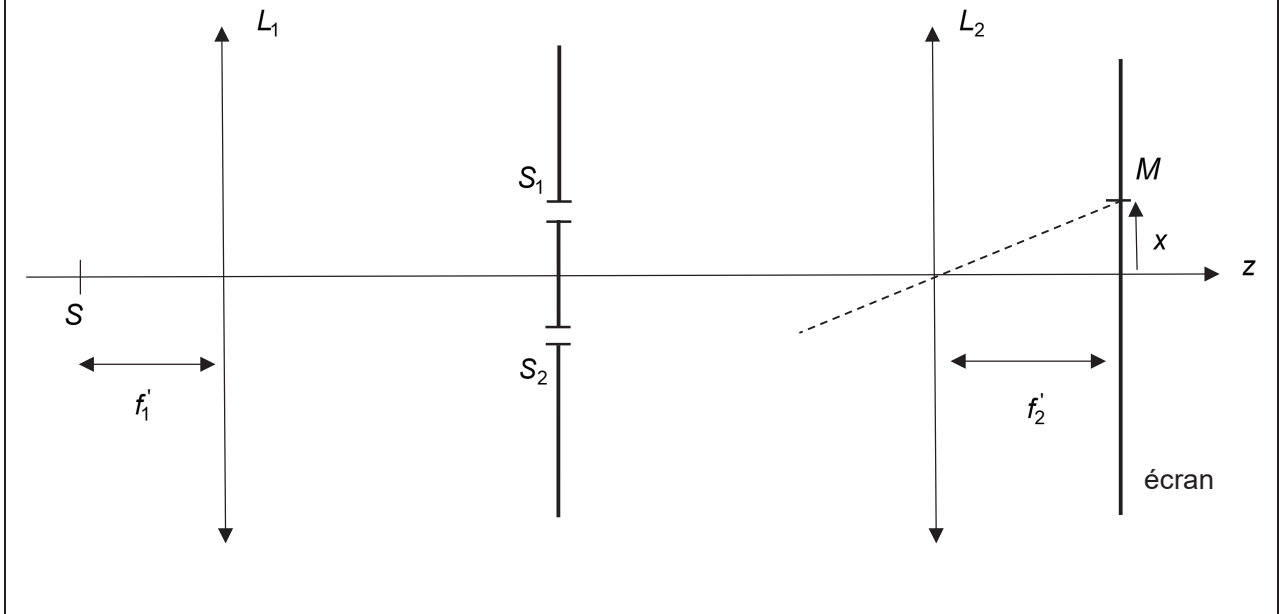
L'incertitude-type  $u(Z)$ , associée à une grandeur  $Z$ , est reliée à la précision  $\Delta(Z)$  (ou demi-intervalle) par :

$$u(Z) = \frac{\Delta(Z)}{\sqrt{3}}$$

## Q28 et Q29 - Diffraction par deux trous d'Young



**Q31 et Q32 - Montage à l'infini des trous d'Young**



**Q51 - Montage de vélocimétrie laser à franges**

(les traits en pointillés permettent de construire les images secondaires)

